Chapitre 20
Calcul différentiel

Table des matières

1 Extrait du programme relatif à ce chapitre

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\ldots,x_n)$ est autorisée.

Différentielle

Application différentiable au point a. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	

Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u,v), on ait $\\|B(u,v)\\| \leqslant C\\|u\\|\,\\|v\\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.

Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$.

Cas des applications numériques

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x,y)$: équation cartésienne.

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

Le théorème des fonctions implicites est hors programme. PC : électrostatique.

Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.

Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.

Démonstration pour Ω convexe.

Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k.

Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_l} \dots \partial_{j_1} f$.

Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.

La notion de différentielle seconde est hors programme. PC : laplacien.

Théorème de Schwarz.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.

Démonstrations non exigibles.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

2 Introduction

2.1 Fonctions étudiées en MPSI

Les fonctions étudiées en MPSI étaient de la forme suivante.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\
I \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{K} \arrow[u, equal] \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \\
\text{nombre réel} \arrow[u, dashed] & \text{nombre réel ou complexe} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

2.1.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{\mathbb{K}} \ell$;
- si f est dérivable en a, alors son nombre dérivé en a est défini par

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad [\text{nombre dans } \mathbb{K}]\,.}$$

2.1.2 Condition nécessaire pour être un extremum local

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I ;
- f admet un extremum local en un point a de I

alors $f'(a) = 0$. On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f.

Remarque. Le fait que I soit ouvert est essentiel. En effet, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[0,1]$ et admet un extremum local (et même global) en 0 et en 1. Mais en ces deux points, la dérivée égale 2.

2.1.3 Un lien avec le calcul intégral

Si

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,.$$

2.2 Fonctions étudiées en MP jusque là

Les fonctions étudiées dans le chapitre 17 « Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie » sont de la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \text{ou } E \text{ un evn de dim finie} \arrow[d, dashed] \\
I \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^m \\
x \arrow[r, mapsto] & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\
\text{nombre réel} \arrow[u, dashed] & \text{vecteur de } \mathbb{R}^m \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

où $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{array} \right.$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i-ième coordonnée), donc du type de celles étudiées en MPSI.

2.2.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{\mathbb{R}^m} \ell \text{ ce qui équivaut à, pour tout } i \in [\![1, m]\!],\ \frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{\mathbb{R}} \ell_i\,;$$

- si f est dérivable en a, alors son vecteur dérivé en a est défini par

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (f_1'(a), \dots, f_m'(a)) \quad [\text{vecteur de } \mathbb{R}^m]\,.}$$

2.2.2 Un lien avec le calcul intégral

Si

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \quad [\text{égalité entre vecteurs de } \mathbb{R}^m]$$

i.e.

$$\left(\int_a^b f_1'(x)\,\mathrm{d}x\,, \dots, \int_a^b f_m'(x)\,\mathrm{d}x\right) = (f_1(b) - f_1(a), \dots, f_m(b) - f_m(a))\,.$$

2.2.3 Inégalité des accroissements finis

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I avec une dérivée f' bornée sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in I} \|f'(x)\|\right) |b - a|$.

2.3 Fonctions étudiées en MP dans ce chapitre

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \text{ou } E \text{ un evn de dim finie} & & \text{ou } F \text{ un evn de dim finie} \arrow[d, dashed] \\
\Omega \arrow[u, hook] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{R}^m \\
(x_1, \dots, x_n) \arrow[rr, mapsto] & & (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \\
\text{vecteur de } \mathbb{R}^n \arrow[u, dashed] & & \text{vecteur de } \mathbb{R}^m \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cup}{}}\Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f_i(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i-ième coordonnée), jamais encore étudiée.

2.3.1 Taux d'accroissement non défini

> si $a, x \in \Omega$, alors l'objet $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'est pas défini (division par un vecteur de $\mathbb{R}^n$).

2.3.2 Calcul différentiel

- f est différentiable en $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$(\star) \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1 dans } \mathbb{R}^m]\ ;$$

- f est différentiable en a, alors l'application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant $(\star)$ est unique ;
- si f est différentiable en a, alors sa différentielle en a est l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ définie par

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \underbrace{\mathrm{d}f(a) \cdot (x - a)}_{L(x-a)} + o(\|x - a\|)\ .}$$

Exemple.
L'application

$$\mathrm{Det}\left|\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det A \end{array}\right.$$

est différentiable en I_n et

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Det}(I_n)\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(M)\ . \end{array}\right.$$

2.3.3 Théorème fondamental (Critère $\mathscr{C}^1$)

Si la fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left|\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \end{array}\right.$$

continues sur Ω, pour tout $(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]$, alors l'application f est différentiable sur Ω et, pour tout $a\in\Omega$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\,\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a]$$

où $\mathscr{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

2.3.4 Condition nécessaire pour être un extremum local

Si

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur Ω ;
- f atteint un extremum local en un point $a\in\Omega$,

alors

$$\mathrm{d}f_a = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\ .$$

On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f.

2.4 Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

Considérons un cas particulier de la partie 2.3, en spécialisant à $n = 2$ et $m = 1$. Nous allons donc nous intéresser aux fonctions du type suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 & \\
\Omega \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \\
(x, y) \arrow[r, mapsto] & f(x, y) \\
\text{vecteur de } \mathbb{R}^2 \arrow[u, dashed] & \text{nombre réel} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

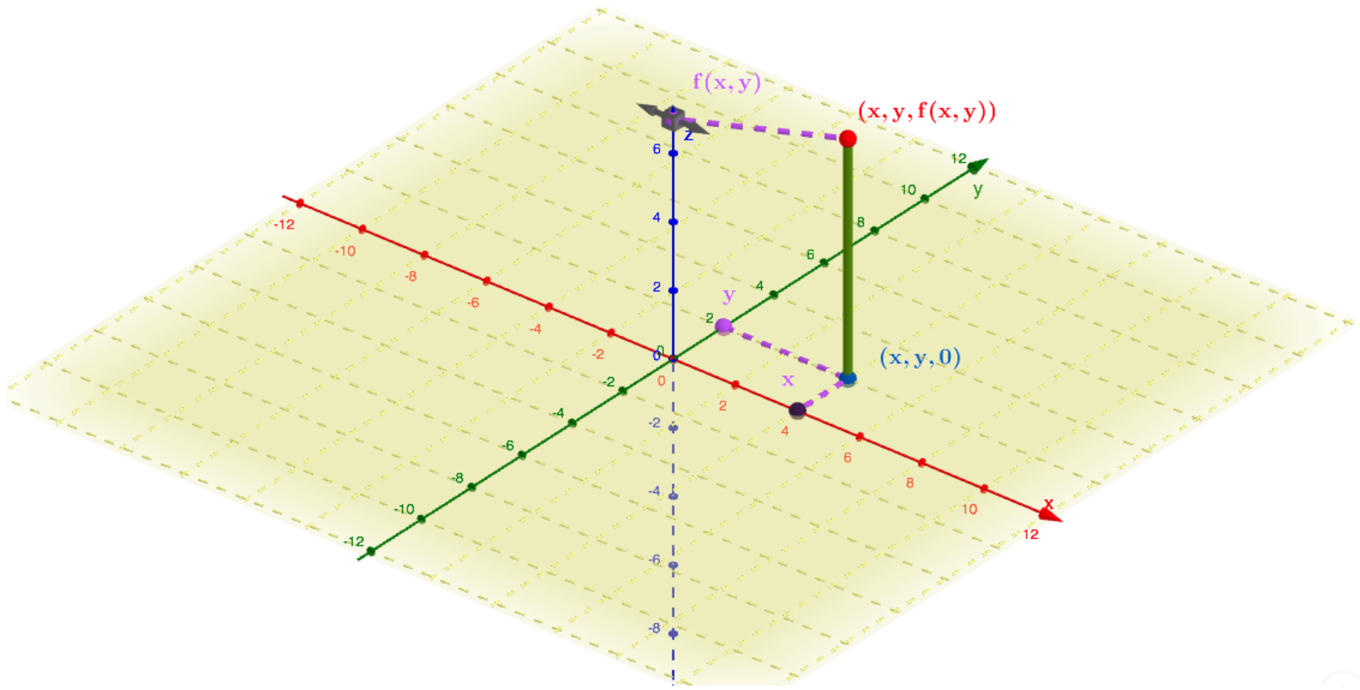
2.4.1 Le graphe de la fonction f

On appelle graphe de la fonction f la partie Γ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Gamma := \{(x, y, f(x, y)) \; : \; (x, y) \in \Omega\}$$

i.e. Γ est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ obtenus en faisant varier $(x, y) \in \Omega$.

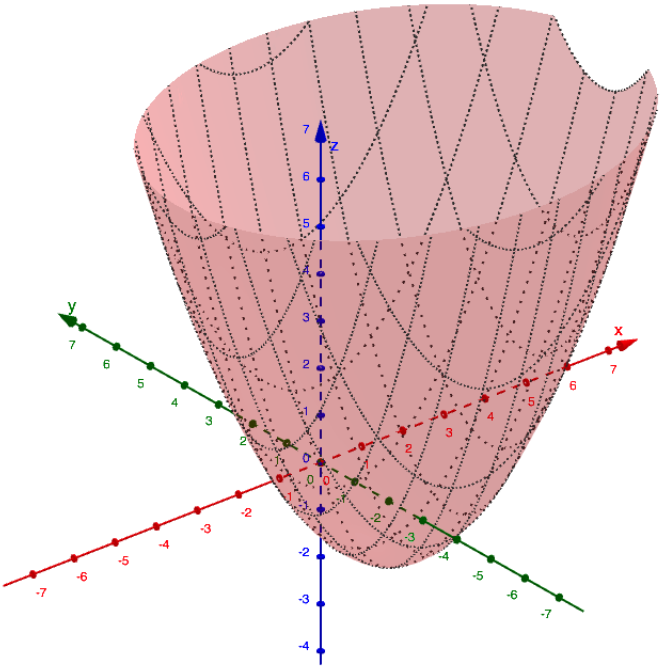
Un point du graphe Γ de f.



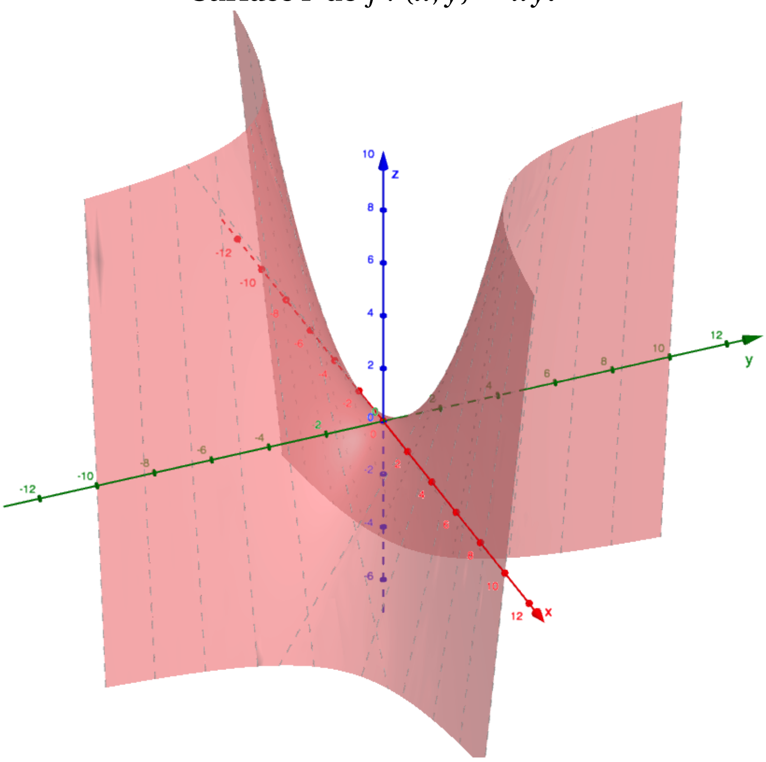
2.4.2 Si f est une continue son graphe est une surface (sens intuitif)

Si l'on suppose que la fonction f est continue sur Ω, alors son graphe Γ a l'allure d'une surface (sens intuitif), appelée parfois nappe.

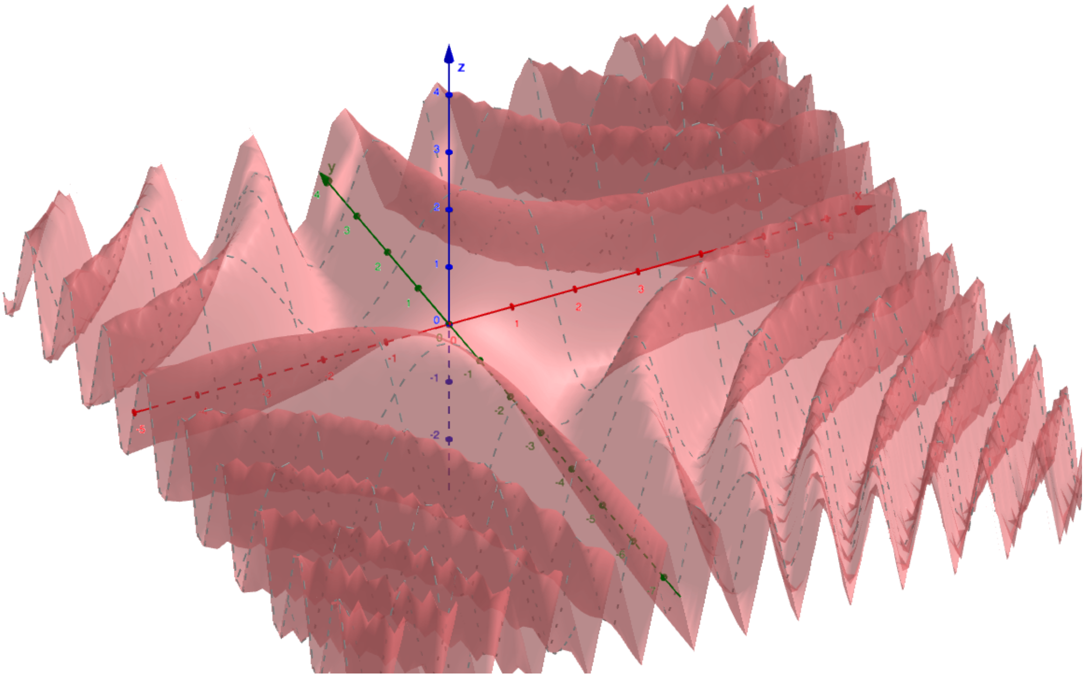
Surface Γ de $f\colon (x,y) \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} - 2$.



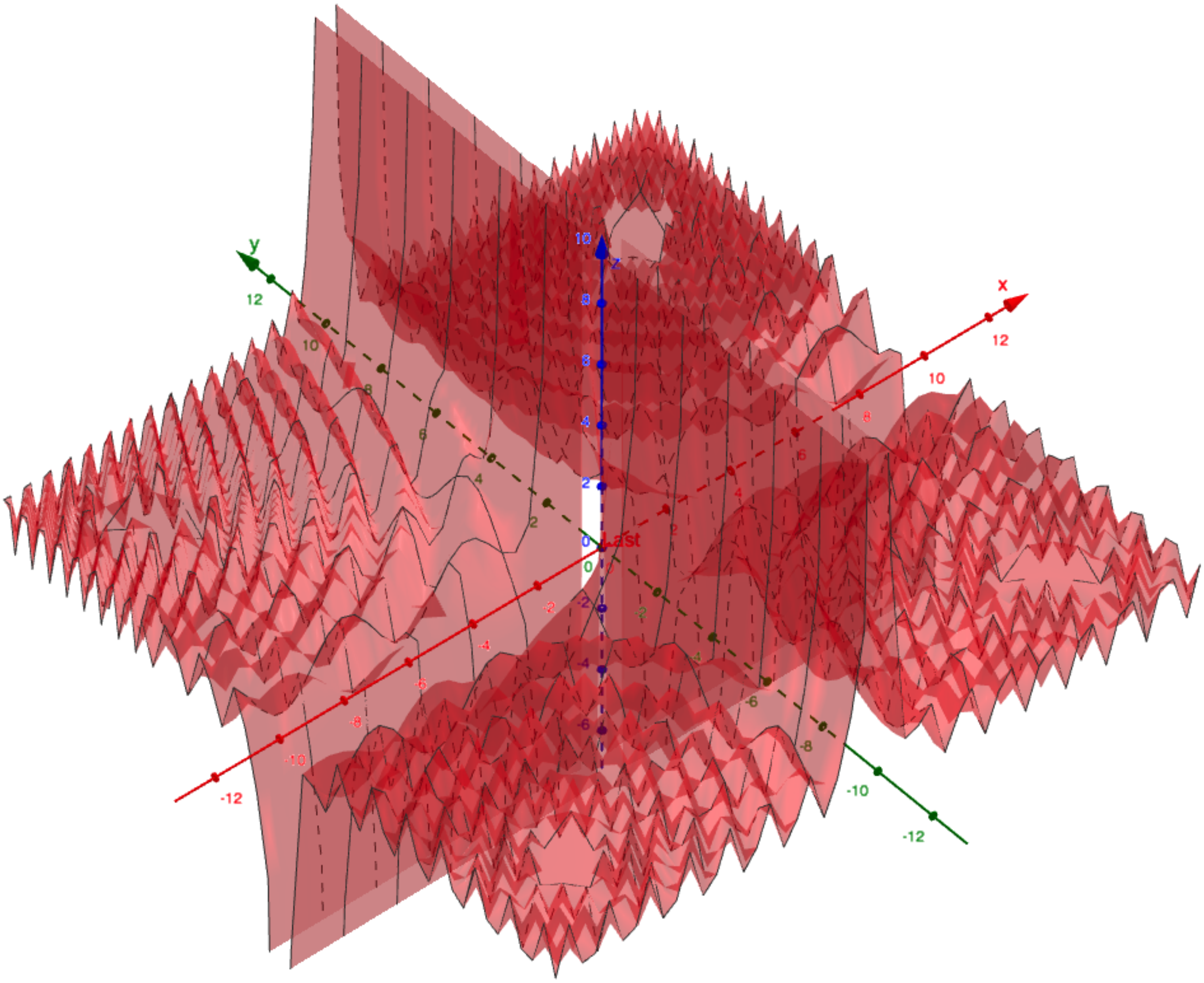
Surface Γ de $f\colon (x,y) \mapsto xy$.



Surface Γ de $f : (x, y) \mapsto \sin(xy)$.



Surface Γ de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} + \sin(xy)$.



2.4.3 Exemple d'étude d'extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Considérons de nouveau la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f : (x,y) \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} - 2 \end{array} \right.$$

et étudions ses extrema.

Comme $f(x,y)$ est une expression polynomiale en les variables x et y, f admet des dérivées partielles en tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.

Après calcul, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (a,b) \mapsto \frac{2}{3}(a-1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (a,b) \mapsto b+1\,.$$

Comme ces deux applications sont continues sur $\mathbb{R}^2$, le critère $\mathscr{C}^1$ s'applique : la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice de $\mathrm{d}f_{(a,b)}$ dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}(a-1) & b+1 \end{pmatrix}.$$

D'après la condition nécessaire pour être un extremum local, f admet un extremum local en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$a-1 = b+1 = 0$$

i.e. si $(a,b) = (1,-1)$. Il est clair que $f(1,-1) = -2$ est un minimum global de f.

Conclusion. La fonction f possède un unique extremum local. Il s'agit d'un minimum global, valant -2, atteint en l'unique point $(1,-1)$.

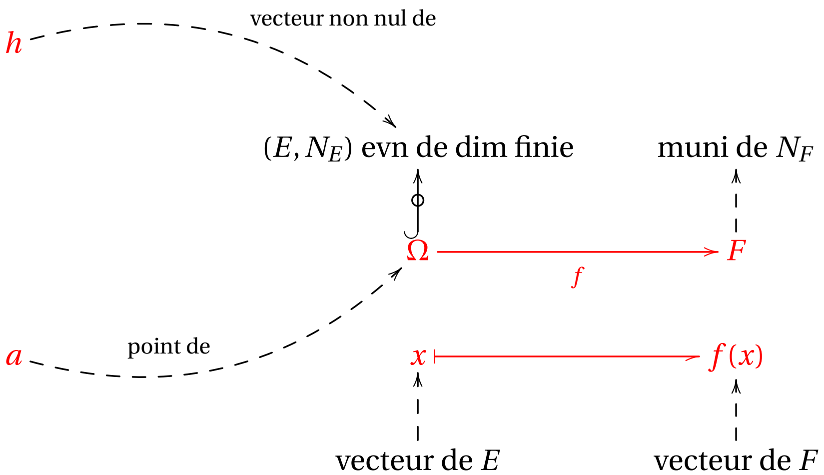
3 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

3.1 Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$

Soient

- E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;
- F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f : \Omega \to F$ une application ;
- a un point de Ω ;
- h un vecteur non nul de E.

On a donc la situation suivante



Lemme 20.1 **(Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$)** — *La fonction de la variable réelle t*

$$\varphi_{a,h} : t \longmapsto f(a + t.h)$$

est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $0_{\mathbb{R}}$.

Démonstration —

- Introduisons la fonction $\tau_{a,h}$, la translation au point a suivant le vecteur h, définie par

$$\tau_{a,h} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & a + t.h \end{array} \right.$$

  Cette application est $N_E(h)$-lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$N_E(\tau_{a,h}(t_2) - \tau_{a,h}(t_1)) = N_E(a + t_2.h - (a + t_1.h))_E = N_E((t_2 - t_1).h) = N_E(h)\ |t_2 - t_1|\ .$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

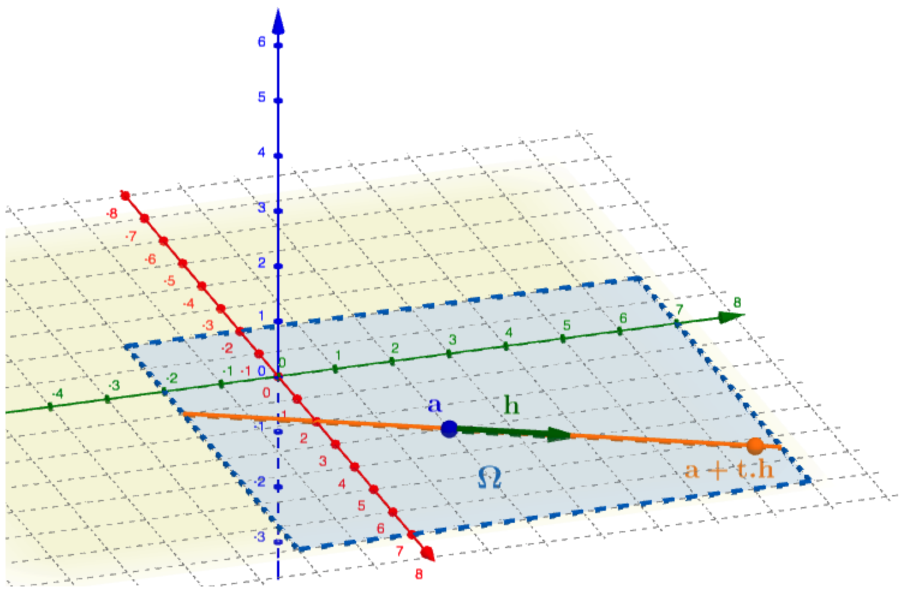
$$\begin{aligned} \varphi_{a,h} \text{ est définie en } t &\iff a + t.h \in \Omega \\ &\iff \tau_{a,h}(t) \in \Omega \\ &\iff t \in \tau_{a,h}^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

  Donc l'ensemble de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$ est $\tau_{a,h}^{-1}(\Omega)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme image réciproque de l'ouvert Ω de E par l'application continue $\tau_{a,h}$.

- De plus, il est clair que $\varphi_{a,h}$ est définie en $0_{\mathbb{R}}$, puisque $a + 0_{\mathbb{R}}.h = a \in \Omega$.

Q.E.D.

Illustration du domaine de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$.



3.2 Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle

DÉFINITION 20.2 (Dérivée selon un vecteur) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application;*
- *a un point de Ω;*
- *h un vecteur non nul de E.*

Soit la fonction $\varphi_{a,h}$ de la variable t réelle

$$\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a + t.h)$$

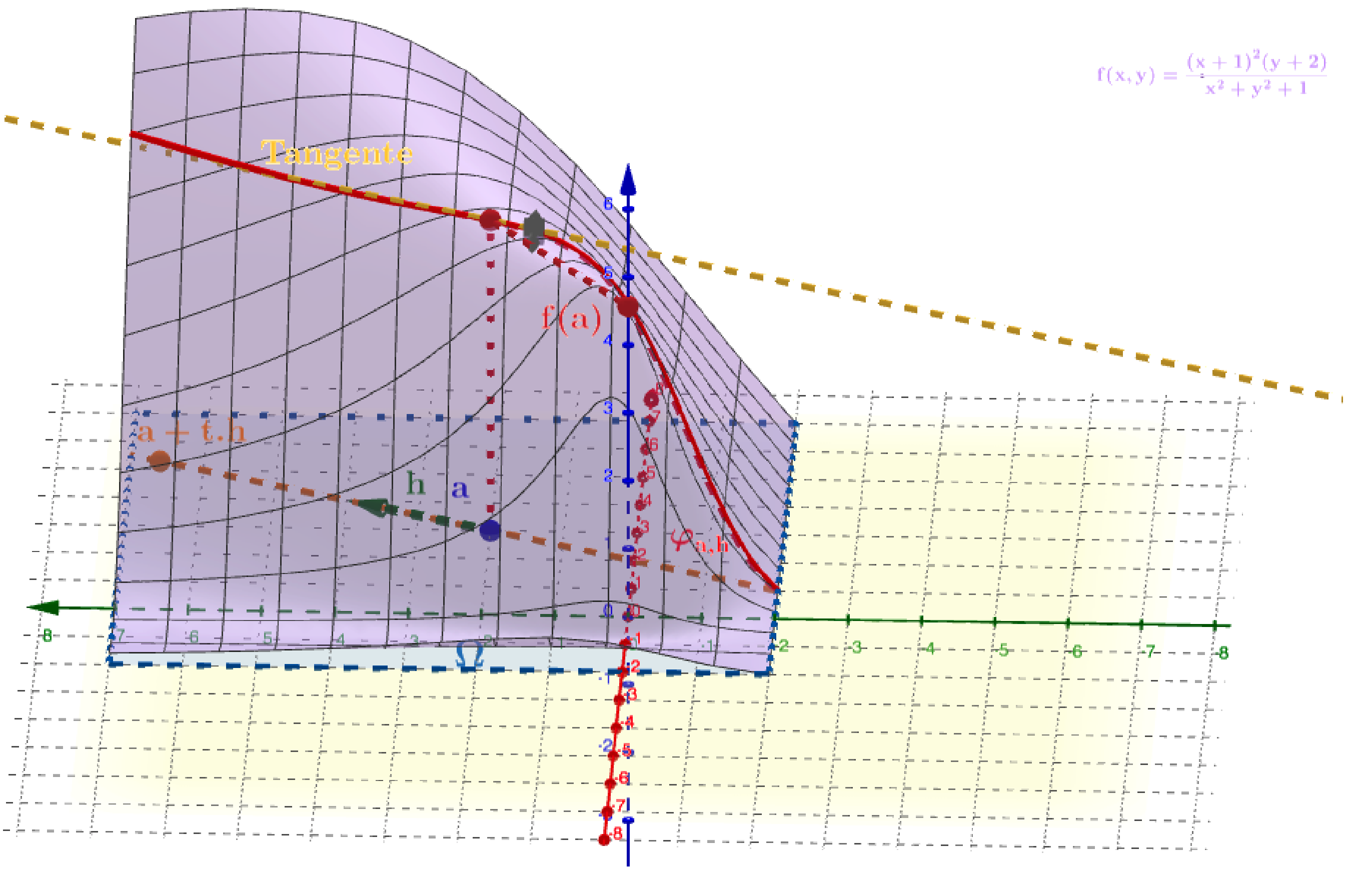
qui est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $0_{\mathbb{R}}$.

1. *On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur h si la fonction $\varphi_{a,h}$ est dérivable en 0.*
2. *Si f est dérivable en a suivant le vecteur h, alors on pose*

$$D_h f(a) := \varphi'_{a,h}(0) = \lim_{t \to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \in F$$

Ce vecteur de F est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h.

Illustration d'une dérivée en un point suivant un vecteur non nul.



EXEMPLE 20.3 — *L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet une dérivée selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ au point en $(0,0)$.
Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\,\frac{t^3\,h_1^3 - t^4\,h_2^4}{t^2\;h_1^2 + t^2\,h_2^2} = \frac{h_1^3 - t\,h_2^4}{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbb{R}}]{} \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}\,.$$

Donc la fonction f est dérivable en $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ au point $(0,0)$ et

$$D_h f(0,0) = \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}\,.$$

3.3 Dérivées partielles

DÉFINITION 20.4 (Dérivées partielles - cas général) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) et d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la base $\mathscr{B}$ de E.*

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $\partial_i f(a)$, par

$$\boxed{\partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F}.$$

DÉFINITION 20.5 (Dérivées partielles - cas où la source est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) — *Soient*

- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, par

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F}.$$

EXEMPLE 20.6 — *L'application f définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + xy + y^2 . \end{array} \right.$$

possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle de f en a.**
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$
  $$\varphi_{a,e_1}(t) := f(a + te_1) = f(a_1 + t, a_2) = (a_1 + t)^3 + (a_1 + t)a_2 + a_2^2 .$$
  Comme cette expression est polynomiale en t, elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et
  $$\frac{df(a + te_1)}{dt} = 3(a_1 + t)^2 + a_2 .$$

Ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \partial_1 f(a) = \left.\frac{df(a+te_1)}{dt}\right|_{t=0} = 3a_1^2 + a_2\,.$$
Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x,y)$ par rapport à x, en supposant y constant, avant d'évaluer le résultat en $(x,y) = (a_1,a_2)$.

- **Deuxième dérivée partielle de f en a.**
Pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\varphi_{a,e_2}(t) := f(a+te_2) = f(a_1, a_2+t) = a_1^3 + a_1(a_2+t) + (a_2+t)^2\,.$$
Comme cette expression est polynomiale en t, elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et
$$\frac{df(a+te_2)}{dt} = a_1 + 2(a_2+t)\,.$$
Ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) := \partial_2 f(a) = \left.\frac{df(a+te_2)}{dt}\right|_{t=0} = a_1 + 2a_2\,.$$
Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x,y)$ par rapport à y, en supposant x constant, avant d'évaluer le résultat en $(x,y) = (a_1,a_2)$.

REMARQUE 20.7 (**Calcul pratique des dérivées partielles**) **—** *En pratique, lorsque l'on dispose d'une expression de f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la i-ème dérivée partielle se calcule en dérivant l'expression par rapport à la i-ème variable, les autres variables étant considérées comme des constantes, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*

4 Différentiabilité et différentielle en un point

4.1 Notation de Landau

Soient

- (E, N_E) un espace vectoriel normé de dimension finie ;
- (F, N_F) un espace vectoriel normé de dimension finie ;
- $\mathcal{V}_{0_E}^*$ un voisinage de 0_E, privé de 0_E (on parle de voisinage épointé) ;
- une application $f\colon \mathcal{V}_{0_E}^* \to F$.

On écrit

$$f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(N_E(h))$$

si

$$\frac{f(h)}{N_E(h)} \xrightarrow[h\to 0_E]{F} 0_F$$

ou de manière équivalente si

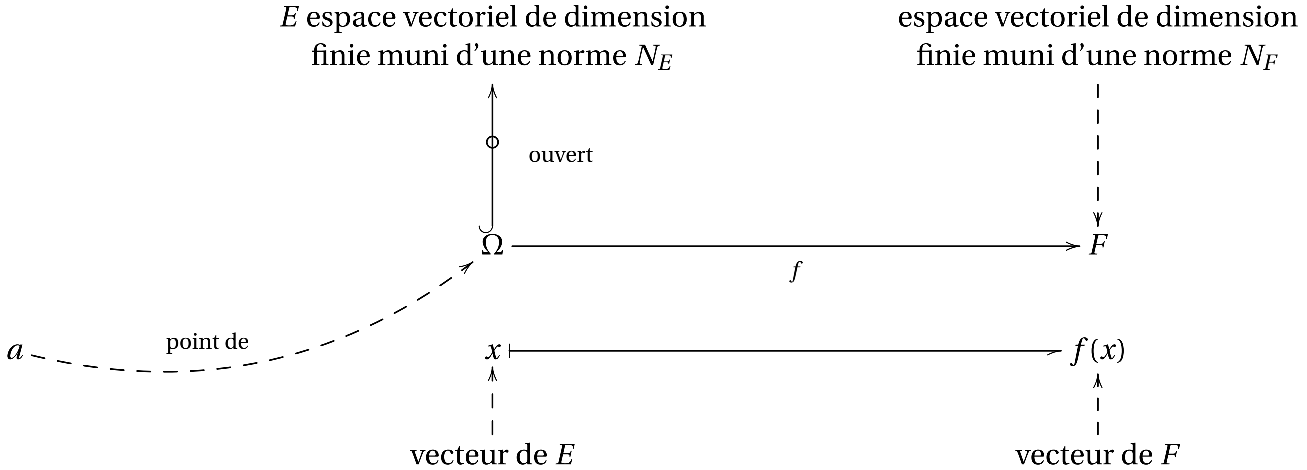
$$\frac{N_F(f(h))}{N_E(h)} = N_F\left(\frac{f(h)}{N_E(h)}\right) \xrightarrow[h\to 0_E]{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}\,.$$

Idée intuitive. $f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(N_E(h))$ signifie que

la quantité vectorielle $f(h)$ dans F, divisée par $N_E(h)$, tends vers 0_F, lorsque h tend vers 0_E.

4.2 Présentation du contexte général

Dans cette partie 4, nous considérerons souvent la situation suivante.



4.3 Application différentiable en un point

DÉFINITION 20.8 (Application différentiable en un point) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application;*
- *a un point de Ω.*

On dit que <u>f est différentiable en a</u> s'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(N_E(h))$$

i.e. telle que

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{N_E(h)} \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$$

REMARQUE 20.9 (L'application $h \mapsto f(a+h)$ est définie sur un voisinage de 0_E) — *Comme Ω est un ouvert de E et comme $a \in \Omega$, il existe $r_a > 0$ tel que $\mathscr{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. On en déduit que le vecteur $f(a+h)$ de F est bien défini, pour tout $h \in \mathscr{B}_E(0_E, r_A)$, donc sur un voisinage de 0_E.*

REMARQUE 20.10 (Interprétation de l'application linéaire $L \in \mathscr{L}(E,F)$) — *L'application $L \in \mathscr{L}(E,F)$ peut être vue comme l'application linéaire de E dans F qui approxime au mieux l'application*

$$h \mapsto f(a+h) - f(a)$$

au voisinage de 0_E.

EXEMPLE 20.11 (Différentiabilité en tout point de l'élévation au carré dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) — *Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par*

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| [M]_{i,j} \right| \right).$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right. .$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.

- *Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

$$f(A+H) = (A+H)^2 = (A+H)(A+H) = \underbrace{A^2}_{f(A)} + \underbrace{AH + HA}_{\text{linéaire en } H} + H^2 .$$

- *L'application*

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & AH + HA \end{array} \right.$$

  est linéaire.

- *Pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$*
$$0 \leq \left\| H^2 \right\| \leq \|H\|^2$$
et donc
$$0 \leq \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq \|H\| \ .$$
Par Théorème d'encadrement
$$\frac{H^2}{\|H\|} \xrightarrow[H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Donc
$$H^2 \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{=} o(\|H\|) \ .$$
- *De ce qui précède on déduit que l'application f est différentiable en a, avec*
$$f(A+H) = f(A) + L(H) + \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$$
où L est l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $AH + HA$.

4.4 La différentiabilité en a entraine la continuité en a

PROPOSITION 20.12 (La différentiabilité en a entraine la continuité en a) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application;*
- *a un point de Ω.*

Si l'application f est différentiable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration — Supposons f différentiable en a. Alors il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que
$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \ .$$
L'application L est linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue et ainsi
$$L(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} L(0_E) = 0_F \ .$$
On observe
$$\underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) = \underbrace{N_E(h)}_{\xrightarrow[H \to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}} \ \underbrace{\frac{\underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}{N_E(h)}}_{\xrightarrow[H \to 0_E]{} 0_F} \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F \ .$$
Ainsi
$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \xrightarrow[h \to 0_E]{} f(a) + 0_F + 0_F = f(a) \ .$$
Q.E.D.

REMARQUE 20.13 (Une application continue en a n'est pas nécessairement différentiable en a) — *L'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue en 0*, mais n'est pas différentiable en* 0.
Démontrons le par l'absurde en supposant que f est différentiable en 0*, i.e. en supposant qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que*

$$|h| = f(h) = f(0) + L(h) + \underset{h\to 0}{o}(|h|) = L(h) + \underset{h\to 0}{o}(|h|) = h\,L(1) + \underset{h\to 0}{o}(|h|)\ .$$

Si $h \in \mathbb{R}^*$, on obtient, en divisant chaque membre par $|h|$

$$1 = \frac{h}{|h|}\,L(1) + \underset{h\to 0}{o}(1)\ .$$

Quand $h \to 0^+$, il vient $L(1) = 1$ et, quand $h \to 0^-$, il vient $-L(1) = 1$. Contradiction.

4.5 Une application différentiable en a admet des dérivées dans toutes les directions en a

PROPOSITION 20.14 (Une application différentiable en a admet des dérivées directionnelles en a) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application;*
- *a un point de Ω;*
- *v un vecteur non nul de E.*

Supposons l'application f différentiable au point a, i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0_E}{o}(N_E(h))\ .$$

Alors l'application f admet une dérivée en a, suivant la direction v, et

$$D_v f(a) = L(v).$$

Démonstration —

- L'application
$$\varepsilon :\ h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{N_E(h)}$$
est définie sur un voisinage $\mathcal{V}_{0_E}^*$ ouvert de 0_E, privé de 0_E (on parle de voisinage épointé de 0_E), et vérifie
    - $f(a+h) = f(a) + L(h) + N_E(h)\,\varepsilon(h)$ pour tout $h \in \mathcal{V}_{0_E}^*$;

- $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$, i.e. $N_F(\varepsilon(h)) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}$.

- On considère pour un $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $t.v \in \mathcal{V}^*_{0_E}$.

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{f(a)+L(t.v)+N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)-f(a)}{t} = \frac{t\,L(v)+N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t} = L(v)+\frac{N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t}.$$

- Le résultat de la proposition 20.14 découle de la propriété

$$\frac{N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_F$$

qui équivaut à

$$N_F\left(\frac{N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_{\mathbb{R}}\,.$$

Nous démontrons ci-dessous.

- Nous observons

$$(\star) \qquad 0 \le N_F\left(\frac{N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t}\right) = \frac{1}{|t|}\,N_F\left(|t|\;N_E(v)\,\varepsilon(t.v)\right) = N_E(v)\,N_F\left(\varepsilon(t.v)\right)$$

Comme $t.v \to 0_E$ quand $t \to 0_{\mathbb{R}}$ et $N_F(\varepsilon(h)) \to 0_{\mathbb{R}}$ quand $h \to 0_E$, on obtient par composition de limites

$$(\star\star) \qquad N_F\left(\varepsilon(t.v)\right) \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_{\mathbb{R}}\,.$$

De $(\star)$, $(\star\star)$ et du Théorème d'encadrement, nous déduisons $N_F\left(\frac{N_E(t.v)\,\varepsilon(t.v)}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_{\mathbb{R}}$.

REMARQUE 20.15 (Admettre des dérivées directionnelles en a n'entraine pas la différentiabilité en a) — *Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$, dans toutes les directions, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$. Démontrons le.

- *Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$. Donc au moins l'un des nombres v_1, v_2 est non nul.*
  Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} &= \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} \\ &= \frac{1}{t}\,\frac{t^5\,v_1^5}{(t\,v_2-t^2\,v_1^2)^2+t^4\,v_1^4} \\ &= \frac{t^4\,v_1^5}{t^2\,v_2^2-2t^3\,v_1^2\;v_2+2t^4\,v_1^4} \\ &= \frac{t^2\,v_1^5}{v_2^2-2t\,v_1^2\;v_2+2t^2\,v_1^4} \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

- **Cas où $v_2 \neq 0$.**
Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\frac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2\, v_1^5}{v_2^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0\,;$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v=(v_1,v_2)$ et

$$D_v f(0,0) = 0\,.$$

- **Cas où $v_2 = 0$.**
Supposons $v_2 = 0$. Alors comme $v \neq (0,0)$, $v_1 \neq 0$.

$$\frac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} = \frac{t^2\, v_1^5}{2t^2\, h_1^4} = \frac{v_1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{v_1}{2}\,;$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v=(v_1,v_2)$ et

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1}{2}\,.$$

- *L'application admet donc des dérivées en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}$ et*

$$(\star) \qquad D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 \neq 0 \\ \dfrac{v_1}{2} & \text{si } v_2 = 0\,. \end{cases}$$

- *Démontrons que f n'est pas différentiable en $(0,0)$, en raisonnant par l'absurde.*
Supposons donc qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que

$$f((0,0)+(h_1,h_2)) = f(0,0) + L(h_1,h_2) + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)\,.$$

D'après la Proposition 20.14

$$(\star\star) \qquad \forall\,(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}, \quad D_{(v_1,v_2)} f(0,0) = L(v_1,v_2)\,.$$

Calculons de deux manières $D_{(1,1)} f(0,0)$. D'après $(\star)$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = 0\,.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = L(1,1) = L((1,0)+(0,1)) = L(1,0)+L(0,1) = D_{(1,0)} f(0,0) + D_{(0,1)} f(0,0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}\,.$$

On a ainsi une contradiction.

4.6 Différentielle en a d'une application différentiable en a

PROPOSITION-DÉFINITION 20.16 (Différentielle en a d'une application différentiable en a) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application ;*
- *a un point de Ω ;*

Supposons l'application f différentiable au point a, i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que

$$(\star) \qquad f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0_E}{o}(N_E(h)) \ .$$

1. *L'application linéaire L vérifiant $(\star)$ est unique.*
2. *L'application linéaire L est appelée différentielle de f en a et est notée $df(a)$.*
3. *La différentielle de f en a est l'unique application linéaire de E dans F telle que*

$$(\star) \qquad \boxed{f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{o}(N_E(h)) \ .}$$

Démonstration — Seul l'unicité d'une application linéaire L de E dans F vérifiant $(\star)$ mérite une explication. Supposons qu'il existe deux applications linéaires $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ telles que

$$f(a+h) = f(a) + L_1(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \qquad \text{et} \qquad f(a+h) = f(a) + L_2(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \ .$$

Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. D'après la Proposition 20.14

$$L_1(v) = \mathrm{D}_v f(a) = L_2(v) \ .$$

De plus, comme $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(E,F)$

$$L_1(0_E) = 0_F = L_2(0_E).$$

Donc les applications L_1 et L_2 sont égales. **Q.E.D.**

REMARQUE 20.17 (Expression des dérivées directionnelles en termes de différentielles) — *On conserve les notations de la Proposition-Définition 20.16 et on considère un vecteur $v \in E \setminus \{0_E\}$. D'après la proposition 20.14*

$$D_v f(a) = df(a)\cdot v \ .$$

EXEMPLE 20.18 (Suite de l'exemple 20.11) — *Les résultats établis pour la fonction*

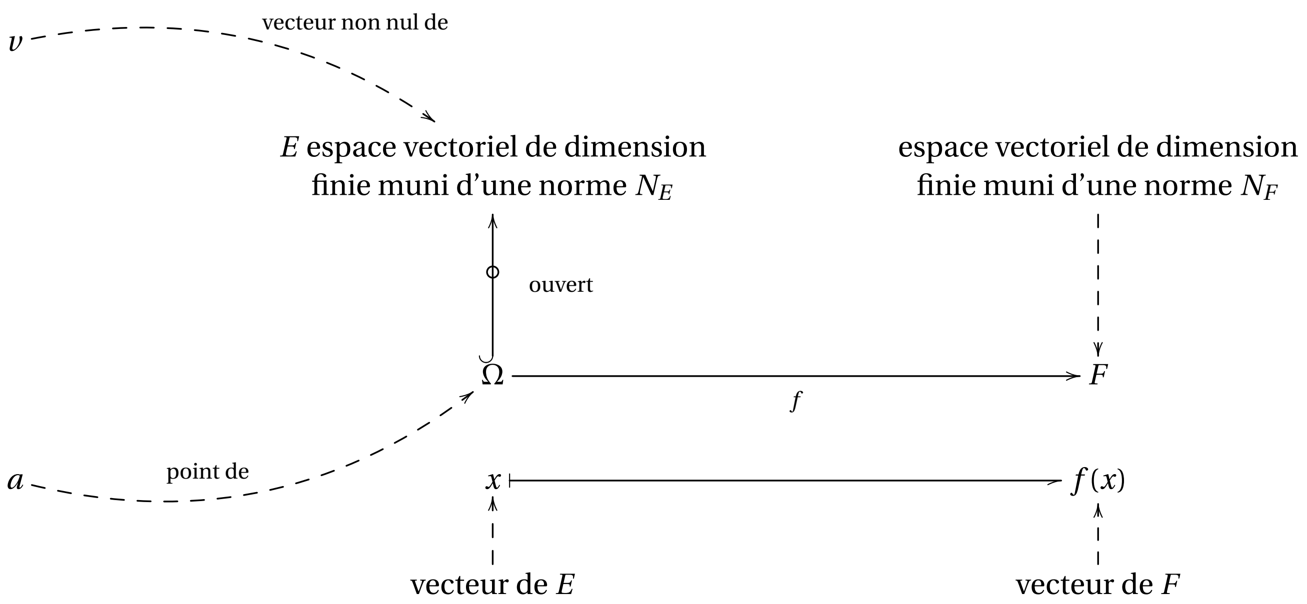
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

dans l'exemple 20.11 s'interprètent comme suit.
L'application f est différentiable en tout point $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la différentielle de f en $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$df(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & AH + HA \ . \end{array} \right.$$

4.7 Synthèse sur la continuité, les dérivées directionnelles et la différentiabilité

On considère la situation suivante.



Continuité de f en a.
La fonction f est continue en a si

$$f(a+h) \xrightarrow[h\to 0_E]{F} f(a)\,.$$

Dérivabilité et dérivée de f en a suivant v.

- La fonction f est dérivable en a suivant v s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\frac{f(a+t.v)-f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{F} \ell\,.$$

- Si f est dérivable en a suivant v, la dérivée de f en a suivant v est

$$\mathrm{D}_v f(a) := \lim_{t\to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+t.v)-f(a)}{t} \in F\,.$$

Dérivabilité partielle et dérivées partielles de f en a dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$
Soit $\mathscr{B}_n = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $i \in [\![1,n]\!]$.

- On dit que f admet une i-ème dérivée partielle en a si la fonction f est dérivable en a suivant e_i, i.e. s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\frac{f(a+t.e_i)-f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{F} \ell\,.$$

- Si f admet une i-ème dérivée partielle en a , la i-ème dérivée partielle de f en a est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \mathrm{D}_{e_i} f(a) := \lim_{t\to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+t.e_i)-f(a)}{t} \in F\,.$$

Différentiabilité et différentielle de f en a.

- La fonction f est différentiable en a s'il existe $L \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))$.
- Si f est différentiable en a, l'application L de E dans F dans le DL1 de f en a est unique. On l'appelle différentielle de f en a et on la note $\mathrm{d}f(a)$. On a donc

$$\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(E,F) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}_{\text{DL1 de } f \text{ en } a}.$$

Différentiabilité de f en a versus continuité de f en a.

$$\boxed{f \text{ différentiable en } a} \Longrightarrow \boxed{f \text{ continue en } a}$$

$$\boxed{f \text{ continue en } a} \;\not\Longrightarrow\; \boxed{f \text{ différentiable en } a}$$

Un exemple d'application continue en un point (0) mais qui n'est pas différentiable en ce point est donné par l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Différentiabilité de f en a versus dérivées directionnelles en a suivant tout vecteur

$$\boxed{f \text{ différentiable en } a} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } a \text{ suivant tout vecteur } v \in E\setminus\{0_E\} \\ \text{et} \\ \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v \end{array}}$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ suivant tout vecteur } v \in E\setminus\{0_E\}} \;\not\Longrightarrow\; \boxed{f \text{ différentiable en } a}$$

Un exemple d'application qui admet des dérivées dans toutes les directions en un point ($(0,0)$) mais qui n'est pas différentiable en ce point est donné par l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ses dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont données par

$$\mathrm{D}_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 \neq 0 \\ \dfrac{v_1}{2} & \text{si } v_2 = 0\,. \end{cases}$$

5 Deux exemples élémentaires d'applications différentiables

5.1 Différentiabilité et différentielle d'une application constante

PROPOSITION 20.19 (Différentiabilité et différentielle d'une application constante) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application constante;*
- *a un point de Ω;*

Alors l'application f est différentiable en a et

$$df(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)} .$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathscr{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathscr{B}_E(0_E, r_a)$

$$f(a+h) = f(a) = f(a) + \underbrace{0_{\mathscr{L}(E,F)}(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{0_F}_{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a, l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)} .$$

Q.E.D.

5.2 Différentiabilité et différentielle d'une restriction d'application linéaire

PROPOSITION 20.20 (Différentiabilité et différentielle d'une restriction d'application linéaire) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : E \to F$ une application linéaire dont la restriction à Ω est notée $f_{|\Omega}$;*
- *a un point de Ω;*

Alors l'application $f_{|\Omega}$ est différentiable en a et

$$df_{|\Omega}(a) = f .$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathscr{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathscr{B}_E(0_E, r_a)$

$$f_{|\Omega}(a+h) = f(a+h) = f(a) + f(h) = f_{|\Omega}(a) + \underbrace{f(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{0_F}_{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a, l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$\mathrm{d}f(a) = f\,.$$

Q.E.D.

6 Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

6.1 Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

PROPOSITION 20.21 (**Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$**) — *Soient*

- $m \geq 1$ *un nombre entier;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}$*;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *une fonction;*
- a *un point de* Ω*;*

1. *La fonction f est différentiable en a si et seulement si la fonction f est dérivable en a.*
2. *Si la fonction f est différentiable en a, alors*
   - *la différentielle de f en a : $df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$;*
   - *la dérivée de f en a : $f'(a) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^m$*

   s'expriment mutuellement l'une en fonction de l'autre comme suit

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ df(a) \cdot h = h.f'(a) \quad \textit{et} \quad f'(a) = df(a) \cdot 1\,.$$

Démonstration —

- Supposons l'application f différentiable en a. Il existe $r_a > 0$ tel que $]a - r_a, a + r_a[\subset \Omega$ et pour tout $h \in]-r_a, r_a[$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(|h|) = f(a) + h\,.\,\mathrm{d}f(a) \cdot 1 + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(|h|)$$

  Ainsi

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \mathrm{d}f(a) \cdot 1 + \underbrace{\frac{\underset{h \to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(|h|)}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_{\mathbb{R}^m}}$$

  et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{R}}]{} \mathrm{d}f(a) \cdot 1\,.$$

  La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.

- Supposons l'application f dérivable en a. Alors f admet un DL1 en a au sens des fonctions de la variable réelle

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h.f'(a)}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(|h|)$$

  d'après la Proposition 17.6 du chapitre 17 « Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ».
  Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a, l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$\mathrm{d}f(a) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ h & \mapsto & h.f'(a)\,. \end{array} \right.$$

Q.E.D.

EXEMPLE 20.22 — *On considère la fonction inverse*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

et un point a de $\mathbb{R}^*$. La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$. D'après la Proposition 20.21, l'application f est différentiable en a et sa différentielle est donnée par

$$df(a) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & -\dfrac{h}{a^2} \end{array} \right. .$$

6.2 Différentielle d'une fonction différentiable définie sur ouvert de $\mathbb{R}^n$ via ses dérivées partielles

PROPOSITION 20.23 (Expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles) — *Soient*

- *$n \geq 1$ et $m \geq 1$ des nombres entiers;*
- *$\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application supposée différentiable en a.*

1. *Les dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) := D_{e_1} f(a) \in \mathbb{R}^m \quad , \quad \ldots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) := D_{e_1} f(a) \in \mathbb{R}^m$$

   existent toutes.

2. *Pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i \in \mathbb{R}^n$, où $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$*

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^m .$$

   La connaissance des dérivées partielles de f en a suffit donc à connaître la différentielle de f en a.

Démonstration —

1. L'assertion est conséquence de la Proposition 20.14.

2. Soit $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i \in \mathbb{R}^n$, où $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(a)\cdot h &= \mathrm{d}f(a)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} h_i.e_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i.\,\mathrm{d}f(a)\cdot e_i \quad [\text{linéarité de } \mathrm{d}f(a)]\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i.\mathrm{D}_{e_i}f(a) \quad [\text{Proposition 20.14.}]\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

6.3 Matrice Jacobienne

PROPOSITION 20.24 (**Matrice Jacobienne**) — *Soient*

- $n \geq 1$ *et* $m \geq 1$ *des nombres entiers;*
- $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- $\mathscr{B}_m = (e'_1, \dots, e'_m)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^m$ *;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- a *un point de* Ω *;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^m\ ;\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ *une application supposée différentiable en a.*

1. *Pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$, *la* i*-ème application coordonnée de* f

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f_i(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

est différentiable en a.

2. *Pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$, *la* i*-ème application coordonnée de* f

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f_i(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

admet des dérivées en a dans toutes les directions, en particulier ses dérivées partielles en a existent.

3. *La matrice de l'application* $df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *dans les bases* $\mathscr{B}_n$ *et* $\mathscr{B}_m$ *est donnée par*

$$Mat_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\,df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\textit{matrice Jacobienne de } f \textit{ en } a]$$

Démonstration —

- On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ des normes N_n et N_m définies par

$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad N_n(x_1,\dots,x_n):=\max_{1\le i\le n}|x_i| \qquad \text{et} \qquad \forall\,(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m,\quad N_m(x_1,\dots,x_m):=\max_{1\le i\le m}|x_i|\ .$$

- Pour tout $h\in\mathbb{R}^n$, le vecteur $\mathrm{d}f(a)\cdot h\in\mathbb{R}^m$ se décompose d'une unique manière dans la base $\mathscr{B}_m$. Il existe un unique m-uplet de réels $(L_1(h),\dots,L_m(h))$ tels que

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h=\sum_{i=1}^m L_i(h).e'_i\ .$$

Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, on définit l'application L_i par

$$L_i\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ h & \mapsto & L_i(h)\end{array}\right.$$

i.e. l'application L_i associe à un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ la i-ème coordonnée du vecteur $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ de $\mathbb{R}^m$ dans la base $\mathscr{B}_m$.

- Démontrons que les applications $L_1,\dots,L_m$ sont linéaires. Soient $h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m L_i(\lambda_1.h_1+\lambda_2.h_2).e'_i &= \mathrm{d}f(a)\cdot(\lambda_1.h_1+\lambda_2.h_2) \quad [\text{par définition des applications } L_1,\dots,L_m]\\ &= \lambda_1\,\mathrm{d}f(a)\cdot h_1+\lambda_2\,\mathrm{d}f(a)\cdot h_2 \quad [\,\mathrm{d}f(a) \text{ est linéaire}]\\ &= \lambda_1.\sum_{i=1}^m L_i(h_1).e'_i+\lambda_2.\sum_{i=1}^m L_i(h_2).e'_i \quad [\text{par définition des applications } L_1,\dots,L_m]\\ &= \sum_{i=1}^m\left(\lambda_1.L_i(h_1)+\lambda_2.L_i(h_2)\right).e'_i\end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^m$ dans la base $\mathscr{B}_m$, il vient

$$\forall\, i\in[\![1,m]\!],\quad L_i(\lambda_1.h_1+\lambda_2.h_2)=\lambda_1.L_i(h_1)+\lambda_2.L_i(h_2)\ .$$

- Soit $r_a>0$ tel que $\mathscr{B}_E(a,r_a)\subset\Omega$. Comme f est différentiable en a, pour tout $h\in\mathscr{B}_E(0_E,r_a)$

$$f(a+h)=f(a)+\,\mathrm{d}f(a)\cdot h+\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))$$

i.e.

$$(\star)\quad N_m\left(\frac{f(a+h)-f(a)-\,\mathrm{d}f(a)\cdot h}{N_n(h)}\right)\xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{}0_{\mathbb{R}}\ .$$

Comme

$$\begin{aligned}f(a+h) &= (f_1(a+h),\dots,f_m(a+h))=\sum_{i=1}^m f_i(a+h).e'_i\\ f(a) &= (f_1(a),\dots,f_m(a))=\sum_{i=1}^m f_i(a).e'_i\\ \mathrm{d}f(a)\cdot h &= \sum_{i=1}^m L_i(h).e'_i\end{aligned}$$

on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\,\mathrm{d}f(a)\cdot h}{N_n(h)}=\sum_{i=1}^m\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-L_i(h)}{N_n(h)}.e'i$$

et donc

$$N_m\left(\frac{f(a+h)-f(a)-\,\mathrm{d}f(a)\cdot h}{N_n(h)}\right)=\max_{1\le i\le m}\left|\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-L_i(h)}{N_n(h)}\right|\ .$$

- Soit $k \in [\![1,m]\!]$. De
$$0 \leq \left|\frac{f_k(a+h)-f_k(a)-L_k(h)}{N_n(h)}\right| \leq \max_{1\leq i\leq m}\left|\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-L_i(h)}{N_n(h)}\right| = N_m\left(\frac{f(a+h)-f(a)-\mathrm{d}f(a)\cdot h}{N_n(h)}\right)$$
($\star$) et du Théorème d'encadrement, on déduit
$$\frac{f_k(a+h)-f_k(a)-L_k(h)}{N_n(h)} \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0_{\mathbb{R}}$$
i.e.
$$f_k(a+h) = f_k(a) + \underbrace{L_k(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))\,.$$
Comme nous avons obtenu un DL1 de f_k en a, l'application f_k est différentiable en a et de plus la différentielle de f_k en a est l'application linéaire L_k, i.e.
$$\mathrm{d}f_k(a) = L_k\,.$$

- D'après ce qui précède, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$
$$(\star\star) \qquad \mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{i=1}^{m} L_i(h)\,.\,e'_i = \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{d}f_i(a)\cdot h)\,.\,e'_i$$

- La première assertion est démontrée. La seconde résulte de la Proposition 20.14. Reste à calculer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\mathrm{d}f(a))$. Il s'agit donc de calculer, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les coordonnées du vecteur $\mathrm{d}f(a)\cdot e_j$ dans la base $\mathscr{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$, celles-ci formant la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\mathrm{d}f(a))$.

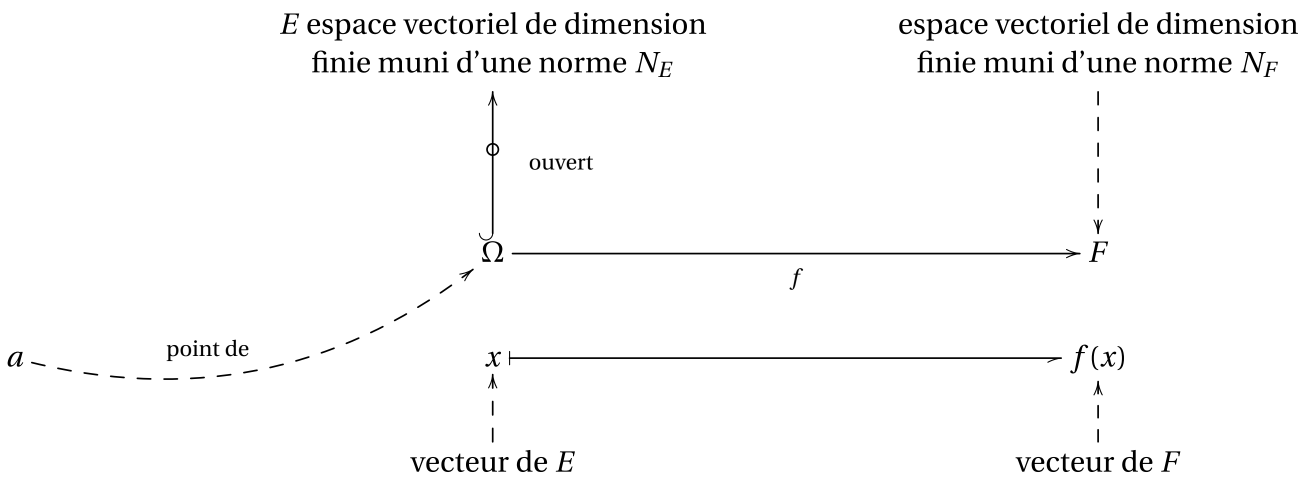
- Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(a)\cdot e_j &= \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{d}f_i(a)\cdot e_j)\,.\,e'_i \quad [\text{d'après } (\star\star)]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\mathrm{D}_{e_j}f_i(a)\,.\,e'_i \quad [\text{Proposition 20.14}]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\,.\,e'_i \quad [\text{Définition des dérivées partielles}]
\end{aligned}$$

Donc la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\mathrm{d}f(a))$ est $\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)\end{pmatrix}$.

Q.E.D.

7 Différentiabilité et caractère $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert

On considèrera souvent, dans cette section, la situation suivante.



7.1 Différentiabilité et différentielle sur un ouvert

DÉFINITION 20.25 (Application différentiable et différentielle sur un ouvert) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application.*

1. *L'application f est dite <u>différentiable sur Ω</u> si elle est différentiable en tout point a de Ω, i.e. si pour tout $a \in \Omega$, il existe une application linéaire $L_a \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour h dans un voisinage de 0_E, on ait le développement limité à l'ordre 1*

$$(\star) \qquad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{h \to 0_E}{o}(N_E(h))\,.$$

2. *Supposons l'application f différentiable sur Ω. Alors, pour tout $a \in \Omega$, l'application linéaire $L_a \in \mathscr{L}(E,F)$ figurant dans $(\star)$ est unique ; elle est appelée différentielle de f en a et est notée $df(a)$. On a donc, pour tout $a \in \Omega$, pour h dans un voisinage de 0_E*

$$(\star) \qquad f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{o}(N_E(h))\,.$$

La <u>différentielle de f</u> est l'application df de Ω dans $\mathscr{L}(E,F)$ définie par

$$df \left| \begin{array}{lcl} \Omega & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) \left| \begin{array}{lcl} E & \to & F \\ h & \mapsto & df(a)\cdot h \end{array} \right. \quad \left[\textit{application linéaire figurant dans le DL1 de } f \textit{ en } a\right]\,. \end{array} \right.$$

EXEMPLE 20.26 (Suite des exemples 20.11 et 20.18) — *Dans les exemples 20.11 et 20.18, nous avons démontré que l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$df(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & AH+HA\,. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'application f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa différentielle df est donnée par

$$df \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto & df(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & AH+HA \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

7.2 Rappels sur les normes sur un espace vectoriel de dimension finie

PROPOSITION 20.27 (Existence d'une norme sur un espace vectoriel de dimension finie) — *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une norme sur E.*

Démonstration —

- Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit l'application N par

$$N \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x=\sum_{k=1}^{n} x_k.e_k, \text{ où } x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K} & \mapsto & \max_{1\le k\le n}|x_k|\,. \end{array} \right.$$

  L'application N est une norme sur E.

- Soit $x=\sum_{k=1}^{n} x_k.e_k \in E$, où $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$, tel que $N(x)=0$. Alors pour tout $\ell\in[\![1,n]\!]$

$$0\le |x_\ell| \le \max_{1\le k\le n}|x_k| = N(x) = 0\,.$$

  Donc $x_1=\ldots=x_n=0$ et $x=0_E$. La propriété de séparation de N est donc établie.

- Soient $x=\sum_{k=1}^{n} x_k.e_k \in E$, où $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$, et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a donc $\lambda.x=\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k).e_k$ et ainsi

$$N(\lambda.x) = \max_{1\le k\le n}|\lambda\, x_k|\,.$$

  . Si $\lambda=0$, alors $N(\lambda.x)=N(0_E)=0=0.N(x)=|\lambda|\,N(x)$.

  . On suppose désormais $\lambda\in\mathbb{K}^*$. Pour tout $\ell\in[\![1,n]\!]$

$$|\lambda x_\ell| = |\lambda|\;|x_\ell| \le |\lambda|\;\max_{1\le k\le n}|x_k| = |\lambda|\;N(x) \quad \left[\text{indépendant de } \ell\right].$$

  Par passage au max

$$(\star)\qquad N(\lambda.x) = \max_{1\le \ell\le n}|\lambda\;x_\ell| \le |\lambda|\;N(x)$$

En appliquant ($\star$) avec $x \leftarrow \lambda.x$ et $\lambda \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}$, il vient

$$N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.x\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda.x) = \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda.x)$$

et donc

$$(\star\star) \qquad |\lambda|\ N(x) \leq N(\lambda.x)\ .$$

De ($\star$) et ($\star\star$), on déduit $N(\lambda.x) = |\lambda|\ N(x)$.

.

La propriété d'homogénéité de N est donc établie.

- Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k \in E$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k.e_k \in E$, où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. On a donc

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k).e_k$$

et ainsi

$$N(x+y) = \max_{1\ \leq k \leq n} \left|x_k + y_k\right|\ .$$

Pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$

$$\left|x_\ell + y_\ell\right| \leq |x_\ell| + \left|y_\ell\right| \leq \max_{1\ \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1\ \leq k \leq n} \left|y_k\right| = N(x) + N(y) \quad \left[\text{indépendant de } \ell\right]\ .$$

Par passage au max

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)\ .$$

L'application N vérifie l'inégalité triangulaire.

Q.E.D.

THÉORÈME 20.28 (Équivalence des normes en dimension finie) — *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Ce Théorème est admis.

REMARQUE 20.29 —

1. Toutes les normes étant équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, les notions de convergence et de limites, par exemple, ne dépendent pas du choix de la norme.

2. Si toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, il peut être pertinent d'en choisir une particulière, possédant des propriétés agréables pour résoudre un problème. C'est par exemple le cas, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$ entier), où considérer une norme d'algèbre unitaire peut être commode (cf. exponentielle d'une matrice).

7.3 Application de classe $\mathscr{C}^1$

DÉFINITION 20.30 (Application différentiable et différentielle sur un ouvert) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application.*

On dit que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si

1. *l'application f est différentiable sur Ω ;*
2. *sa différentielle $df : \Omega \to \mathscr{L}(E, F)$ est continue sur Ω.*

7.4 Critère fondamental pour être de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert

THÉORÈME 20.31 (Critère $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert) — *Soient*

- *$n \geq 1$ et $m \geq 1$ des nombres entiers ;*
- *$\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$;*
- *$\mathscr{B}_m = (e'_1, \ldots, e'_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *$f : \Omega \to \mathbb{R}^m \;;\; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ une application.*

On a les résultats suivants.

1. *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent <u>et sont continues</u> sur Ω, i.e.*

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \Omega \iff \forall\,(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ est définie } \underline{\text{et continue}} \text{ sur } \Omega.}$$

2. *Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors pour tout $a \in \Omega$, la différentielle de f en a est donnée par*

$$Mat_{\mathscr{B}_n, \mathscr{B}_m}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a]$$

Démonstration —

1. Admis.

2. Déjà établi (Proposition 10.24).

Q.E.D.

EXEMPLE 20.32 — *On souhaite étudier la différentiabilité et, le cas échéant, calculer la différentielle de l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(x^2+xy-y^3, \cos\left(\frac{x}{y^2+1}\right)\right) \end{array} \right.$$

en s'appuyant sur le critère $\mathscr{C}^1$.

- **Introduction des fonctions coordonnées.**
  Si on pose

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto x^2+xy-y^3 \qquad et \qquad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$$

  alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_1}{\partial x}$.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f_1(\cdot, y) : x \mapsto f_1(x,y) = x^2+xy-y^3$$

  est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_1 par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto 2x+y$$

  qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_1}{\partial y}$.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f_1(x, \cdot) : y \mapsto f_1(x,y) = x^2+xy-y^3$$

  est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_1 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto x-3y^2$$

  qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_2}{\partial x}$.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f_2(\cdot, y) : x \mapsto f_2(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$$

  est la composée d'une fonction rationnelle par cos*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto -\frac{1}{y^2+1}\sin\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$$

  qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_2}{\partial y}$.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f_2(x,\cdot): \ y \mapsto f_2(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$$

est la composée d'une fonction rationnelle par cos*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto \frac{2xy}{\left(y^2+1\right)^2}\,\sin\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*

$$Mat_{\mathscr{B}}(\,df(a,b)) = \begin{pmatrix} 2a+b & a-3b^2 \\ -\frac{1}{b^2+1}\sin\left(\frac{a}{b^2+1}\right) & \frac{2ab}{\left(b^2+1\right)^2}\sin\left(\frac{a}{b^2+1}\right) \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et donc pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(a,b)\cdot(h_1,h_2) = \left((2a+b)\,h_1 \ + \ \left(a-3b^2\right)\,h_2\,,\ -\frac{1}{b^2+1}\sin\left(\frac{a}{b^2+1}\right)h_1 \ + \ \frac{2ab}{\left(b^2+1\right)^2}\sin\left(\frac{a}{b^2+1}\right)h_2\right).$$

8 Deux méthodes classiques pour étudier la différentiabilité

8.1 Calculer un DL1 de f en un point a en développant $f(a+h)$

Soient

- E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;
- F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f : \Omega \to F$ une application
- a un point de Ω.

Méthode.
Pour étudier la différentiabilité de f en a, on peut chercher à développer la quantité $f(a+h)$, pour $h \in E$ un vecteur au voisinage de 0_E et chercher à obtenir une expression de la forme

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \underbrace{L(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{r(h)}_{\text{reste}}}$$

Alors, si l'on prouve, <u>avec le plus grand soin</u>, que $r(h) \underset{h \to 0_E}{=} \mathrm{o}(N_E(h))$, alors

1. l'application f est différentiable en a ;
2. $\mathrm{d}f(a) = L$.

Exemple typique (Cf. exemples 20.11 et 20.18).
Nous suivi cette démarche pour établir que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$\mathrm{d}f(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & AH + HA\,. \end{array} \right.$$

8.2 Appliquer le critère fondamental $\mathscr{C}^1$ pour une fonction de plusieurs variables

Soient

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ des nombres entiers ;
- $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- $\mathscr{B}_m = (e'_1, \dots, e'_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$;
- Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^m \;;\; (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ une application.

Méthode.
Pour étudier la différentiabilité de f sur Ω tout entier, on peut, pour chaque couple $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$,

- fixer toutes les variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ (toutes sauf x_i donc)
- considérer la fonction d'une variable réelle

$$f_j(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \cdot, x_n) : x_i \mapsto f_j(x_1, \dots, x_n)$$

- justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle $f_j(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \cdot, x_n)$
- calculer sa dérivée qui est, par définition, la i-ème dérivée partielle de la fonction f_j

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : x_i \mapsto \text{formule explicite à calculer}$$

- mentionner la continuité de la fonction $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ sur Ω (l'existence seule des dérivées partielles n'assure pas la différentiabilité)

et enfin citer le critère $\mathscr{C}^1$ qui livre

1. le caractère $\mathscr{C}^1$ de f sur Ω et donc, en particulier sa différentiabilité sur Ω
2. pour tout $a \in \Omega$

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_n, \mathscr{B}_m}(\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad \left[\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a\right].$$

Exemple typique (Cf. exemple 20.32).
Nous suivi cette démarche pour établir que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2+xy-y^3, \cos\left(\dfrac{x}{y^2+1}\right)\right) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\,\mathrm{d}f(a,b)) = \begin{pmatrix} 2a+b & a-3b^2 \\ -\dfrac{1}{b^2+1}\sin\left(\dfrac{a}{b^2+1}\right) & \dfrac{2ab}{\left(b^2+1\right)^2}\sin\left(\dfrac{a}{b^2+1}\right) \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

9 Opérations sur les applications différentiables

9.1 Combinaison linéaire de deux applications différentiables

PROPOSITION 20.33 (Combinaison linéaire d'applications différentiables) — *Soient*

- E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme* N_E *(elles sont toutes équivalentes) ;*
- F *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme* N_F *(elles sont toutes équivalentes) ;*
- Ω *une partie ouverte de* E *;*
- $f : \Omega \to F$ *et* $g : \Omega \to F$ *deux applications ;*
- λ *et* μ *deux scalaires ;*
- a *un point de* Ω.

Si les applications f *et* g *sont différentiables en* a*, alors l'application*

$$\lambda.f + \mu.g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda.f(x) + \mu.g(x) \end{array} \right.$$

est différentiable en a *et pour tout* $h \in E$

$$d(\lambda.f + \mu.g)(a) \cdot h = \lambda.\, df(a) \cdot h + \mu.\, dg(a) \cdot h \quad [\textit{identité entre vecteurs de } F] .$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathscr{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathscr{B}_E(0_E, r_a)$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \qquad \text{et} \qquad g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}g(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (\lambda.f + \mu.g)(a+h) &= \lambda.f(a+h) + \mu.g(a+h) \\ &= \lambda.\left(f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right) + \mu.\left(g(a) + \mathrm{d}g(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right) \\ &= \underbrace{\lambda.f(a) + \mu.g(a)}_{(\lambda.f+\mu.g)(a)} + \underbrace{\lambda.\,\mathrm{d}f(a) \cdot h + \mu.\,\mathrm{d}g(a) \cdot h}_{(\lambda.\,\mathrm{d}f(a) + \mu.\,\mathrm{d}g(a)) \cdot h} + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \end{aligned}$$

Comme l'application $\lambda.\,\mathrm{d}f(a) + \mu.\,\mathrm{d}g(a) : E \to F$ est linéaire (combinaison linéaire d'applications linéaires), nous avons un DL1 de l'application $\lambda.f + \mu.g$ en a.
Cette dernière est donc différentiable en a et sa différentielle en a est donnée par la partie linéaire du DL1, i.e. pour tout $h \in E$

$$\mathrm{d}(\lambda.f + \mu.g)(a) \cdot h = \lambda.\,\mathrm{d}f(a) \cdot h + \mu.\,\mathrm{d}g(a) \cdot h \quad [\text{identité entre vecteurs de } F] .$$

Q.E.D.

9.2 Composée de deux applications différentiables par une application bilinéaire

PROPOSITION 20.34 (Composée de deux applications différentiables par une application bilinéaire) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F_1 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_{F_1} (elles sont toutes équivalentes);*
- *F_2 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_{F_2} (elles sont toutes équivalentes);*
- *G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_G (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f\colon \Omega \to F_1$ et $g\colon \Omega \to F_2$ deux applications;*
- *$B\colon F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire;*
- *a un point de Ω.*

Si les applications f et g sont différentiables en a, alors l'application

$$B(f,g) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & G \\ x & \mapsto & B(f(x),g(x)) \end{array} \right.$$

est différentiable en a et pour tout $h \in E$

$$dB(f,g)(a)\cdot h = B(\,df(a)\cdot h, g(a)) + B(f(a),\, dg(a)\cdot h) \quad [\textit{identité entre vecteurs de } G]\ .$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathscr{B}_E(a,r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathscr{B}_E(0_E,r_a)$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \qquad \text{et} \qquad g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}g(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\ .$$

On calcule, grâce à la bilinéarité de B

$$\begin{aligned}
B(f,g)(a+h) &= B(f(a+h),g(a+h)) \\
&= B\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)), g(a) + \mathrm{d}g(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right) \\
&= B(f(a),g(a)) \quad \left[\text{terme égal à } B(f,g)(a)\right] \\
&+ B(\,\mathrm{d}f(a)\cdot h, g(a)) + B(f(a),\, \mathrm{d}g(a)\cdot h) \quad \left[\text{expression linéaire en } h\right] \\
&+ \underbrace{B\left(f(a), \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}_{(1)} + \underbrace{B\left(\,\mathrm{d}f(a)\cdot h,\, \mathrm{d}g(a)\cdot h\right)}_{(2)} + \underbrace{B\left(\,\mathrm{d}f(a)\cdot h, \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}_{(3)} \\
&+ \underbrace{B\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)), g(a)\right)}_{(4)} + \underbrace{B\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)),\, \mathrm{d}g(a)\cdot h\right)}_{(5)} + \underbrace{B\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)), \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}_{(6)}
\end{aligned}$$

Démontrons que (1),(2),(3),(4),(5) et (6) sont des $\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))$ et alors la proposition sera établie.

L'application B est bilinéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue et il existe $C_B > 0$ tel que

$$(\star) \quad \forall (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2, \quad N_G(B(y_1, y_2)) \leq C_B\, N_{F_1}(y_1)\, N_{F_2}(y_2)\,.$$

Les applications $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie. Elle sont donc continues et il existe $C_f > 0$ et $C_g > 0$ tels que

$$(\star\star) \quad \forall x \in E, \quad N_{F_1}(\mathrm{d}f(a)\cdot x) \leq C_f\, N_E(x)$$

et

$$(\star\star\star) \quad \forall x \in E, \quad N_{F_2}(\mathrm{d}g(a)\cdot x) \leq C_g\, N_E(x)$$

De ces inégalités $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on déduit

(1). $N_G\left(B\left(f(a), \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)\right) \leq C_B\, N_{F_1}(f(a))\, \underbrace{N_{F_2}\left(\frac{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}{N_E(h)}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}} N_E(h)$

(2). $N_G\left(B\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h, \mathrm{d}g(a)\cdot h\right)\right) \leq C_B\, N_{F_1}(f(a)\cdot h)\, N_{F_2}(g(a)\cdot h) \leq C_B\, C_f\, C_g\, N_E(h)^2$

(3). $N_G\left(B\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h, \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)\right) \leq C_B\, N_{F_1}(f(a)\cdot h)\, N_{F_2}\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)\right) \leq C_B\, C_f\, \underbrace{N_{F_2}\left(\frac{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}{N_E(h)}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}} N_E(h)^2$

(4). Analogue à (3)

(5). Analogue à (1)

(6). $N_G\left(B\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)), \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)\right) \leq C_B\, \underbrace{N_{F_1}\left(\frac{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}{N_E(h)}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}} \underbrace{N_{F_2}\left(\frac{\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))}{N_E(h)}\right)}_{\xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}} N_E(h)^2$

Grâce au Théorème d'encadrement, on obtient que tous les termes (1),(2),(3),(4),(5) et (6) sont des $\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))$.

Q.E.D.

EXEMPLE 20.35 — *Soit $n \geq 2$ un entier. On cherche à appliquer la Proposition 20.34 pour retrouver les résultats établis pour l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

dans les exemples 20.11 et 20.18.
Si on introduit l'application

$$B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M_1, M_2) & \mapsto & M_1 M_2 \end{array} \right.$$

alors l'application $B\left(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)$ est donnée par

$$B\left(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & B\left(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M)\right) = M^2 \end{array} \right.$$

et donc coïncide avec f.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *L'application* $\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ *est linéaire donc différentiable en* A *et sa différentielle en* A *est elle-même, i.e.*

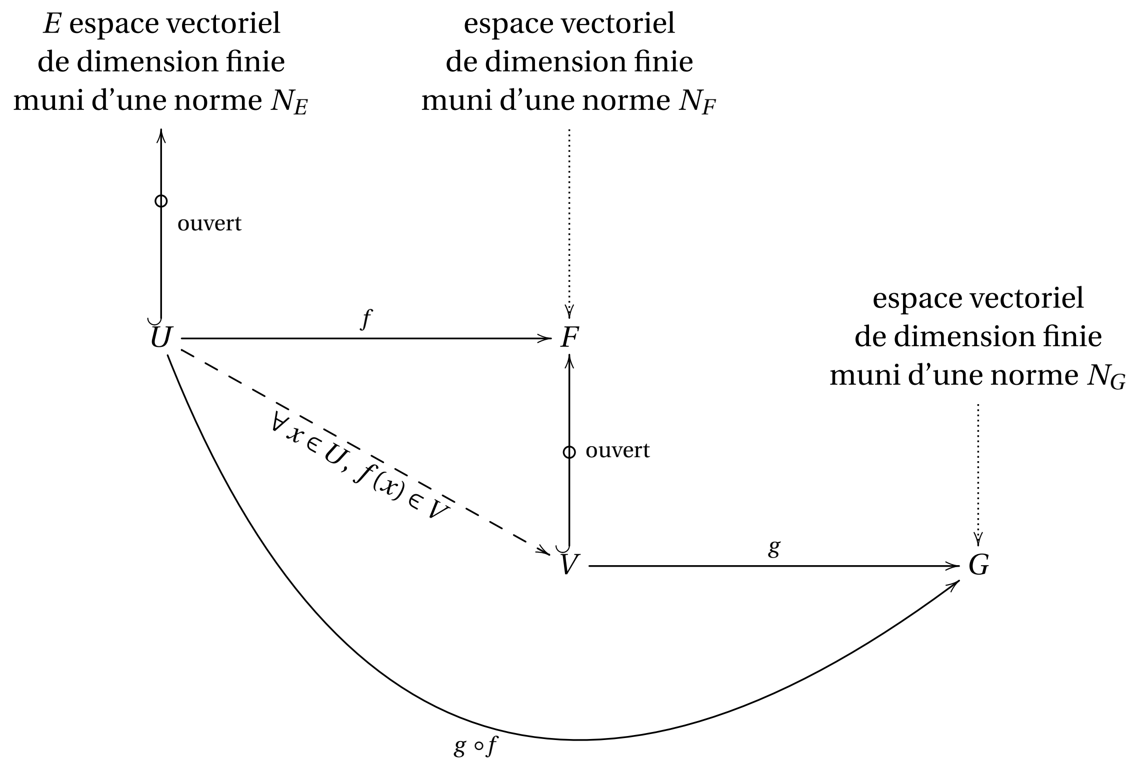
$$d\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A) = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\,.$$

La Proposition 20.34 s'applique. L'application $B\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = f$ *est différentiable en* A *et pour tout* $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} df(A)\cdot H &= dB\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right)(A)\cdot H \\ &= B\left(d\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A)\cdot H, \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A)\right) + B\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A),\ d\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A)\cdot H\right) \\ &= B\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(H), \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A)\right) + B\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(A), \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(H)\right) \\ &= B(H,A) + B(A,H) \\ &= HA + AH\,. \end{aligned}$$

9.3 Composée de deux applications différentiables

Nous allons considérer la situation suivante.



THÉORÈME 20.36 (Composée de deux applications différentiables) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_G (elles sont toutes équivalentes);*
- *U une partie ouverte de E;*
- *V une partie ouverte de F;*
- *une application $f: U \to F$ telle que, pour tout $x \in U$, $f(x) \in V$;*
- *une application $g: V \to G$;*
- *a un point de U.*

On suppose que

(H1) l'application f est différentiable en a;

(H2) l'application g est différentiable en $f(a)$.

Alors l'application

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} U & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = \underbrace{dg(f(a))}_{\in \mathscr{L}(F,G)} \circ \underbrace{df(a)}_{\in \mathscr{L}(E,F)} \quad [\textit{égalité entre applications dans } \mathscr{L}(E,G)]$$

i.e.

$$\forall\, h \in E, \quad d(g \circ f)(a) \cdot h = dg(f(a)) \cdot \big(df(a) \cdot h\big) \quad [\textit{égalité entre vecteurs de } G].$$

Démonstration —

- **Introduction d'un voisinage de $f(a)$.**
Comme $f(a)$ appartient à l'ouvert V de F, il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(f(a), \rho) \subset V$.

$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, dotted, "\text{élément de}"'] \arrow[rr, dotted, bend left, "\text{élément de}"] & B_F(f(a),\rho) \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & V \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & F \end{tikzcd}$$

- **Différentiabilité de g en $f(a)$.**
Comme g est différentiable en $f(a)$, pour tout $k \in B_F(0_F, \rho)$

$$(\star) \qquad g(f(a)+k) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a)) \cdot k + \underset{k \to 0_F}{\mathrm{o}}(N_F(k)).$$

- **Introduction d'un voisinage de a.**
L'application f est différentiable en a, donc continue en a (Proposition 20.12). Donc

$$k(h) := f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F \,.$$

Ainsi, il existe $r > 0$ tel que pour tout $h \in B_E(0_E, r)$

$$a + h \in U \quad \text{et} \quad k(h) := f(a+h) - f(a) \in B_F(0_F, \rho) \,.$$

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, dotted, "\text{élément de}"'] \arrow[rr, dotted, bend left, "\text{élément de}"] & B_F(f(a),\rho) \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & V \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & F \\
a \arrow[u, "\text{image par } f"] \arrow[r, dotted, "\text{élément de}"'] \arrow[rr, dotted, bend right, "\text{élément de}"'] & B_E(a,r) \arrow[u, "x \mapsto f(x)"'] \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & U \arrow[u, "x \mapsto f(x)"'] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & E
\end{tikzcd}$$

- **Vers un DL1 de $g \circ f$ en a.**
On déduit de $(\star)$, par composition de limites, pour tout $h \in B_E(0_E, r)$

$$g(f(a) + k(h)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a)) \cdot k(h) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_F(k(h)))$$

i.e. pour tout $h \in B_E(0_E, r)$

$$(\star\star) \qquad g(f(a+h)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \big(f(a+h) - f(a)\big) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_F(f(a+h) - f(a))) \,.$$

Comme f est différentiable en a, pour tout $h \in B_E(0_E, r)$

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))$$

i.e. , pour tout $h \in B_E(0_E, r)$

$$k(h) := f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \,.$$

Donc d'après $(\star\star)$

$$\begin{aligned}
g(f(a+h)) &= g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \left(\mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \right) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_F(f(a+h) - f(a))) \\
&= g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \big(\mathrm{d}f(a) \cdot h\big) + \underbrace{\mathrm{d}g(f(a)) \cdot \left(\underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \right)}_{r_1(h)} + \underbrace{\underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_F(f(a+h) - f(a)))}_{r_2(h)}
\end{aligned}$$

Comme l'application

$$\left| \begin{array}{lcl} E & \to & G \\ h & \mapsto & \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \big(\mathrm{d}f(a) \cdot h\big) \end{array} \right.$$

est l'application $\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$ qui est linéaire (composée d'applications linéaires), il nous reste à démontrer

$$r_1(h) = \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h)) \qquad \text{et} \qquad r_2(h) = \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))$$

pour établir le résultat.

- **Preuve de** $r_1(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathbf{o}(N_E(h))$**.**
  Par linéarité de l'application $\mathrm{d}g(f(a))$

$$r_1(h) = N_E(h)\ \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right).$$

  Comme l'application linéaire $\mathrm{d}g(f(a))$ est continue (F et G sont des espaces vectoriels de dimension finie)

$$\mathrm{d}g(f(a)) \cdot \left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right) \xrightarrow[h\to 0_E]{} \mathrm{d}g(f(a)) \cdot 0_F = 0_G.$$

  Ainsi, avons-nous établi $r_1(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(N_E(h))$.

- **Preuve de** $r_2(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathbf{o}(N_E(h))$**.**
  Comme l'application $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire, elle est continue (E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie). Donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in E$

$$N_F\left(\mathrm{d}f(a) \cdot u\right) \leq C\, N_E(u).$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_G(r_2(h))}{N_E(h)} &= \frac{N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_F(f(a+h)-f(a)))\right)}{N_E(h)} \\
&= \frac{N_F(f(a+h)-f(a))}{N_E(h)}\, N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right) \\
&= \frac{N_F\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}{N_E(h)}\, N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{N_F\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h\right) + N_F\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}{N_E(h)}\, N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right) \quad [\text{inégalité triangulaire}] \\
&\leq \frac{C\, N_E(h) + N_F\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(N_E(h))\right)}{N_E(h)}\, N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right) \\
&= \left(C + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right) N_G\left(\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(1)\right).
\end{aligned}$$

  Par continuité de la norme N_G (elle est 1-lipschitzienne) et Théorème d'encadrement

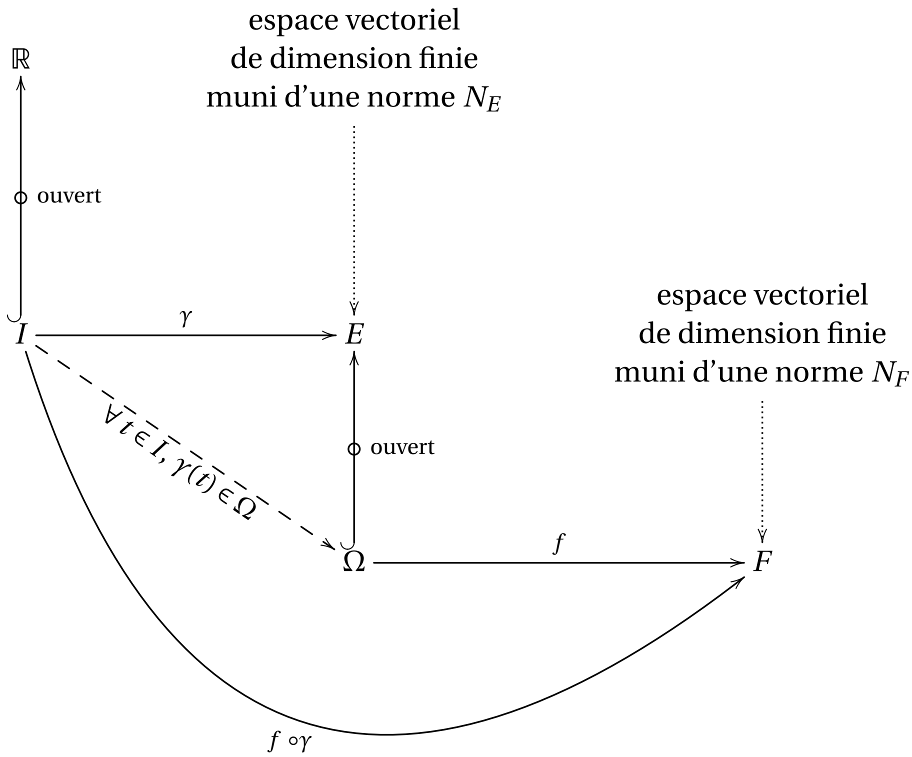
$$\frac{N_G(r_2(h))}{N_E(h)} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

  Ainsi, avons-nous établi $r_2(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(N_E(h))$.

Q.E.D.

9.4 Dérivée le long d'un arc

Nous allons considérer la situation suivante.



RAPPELS 20.37 (Cf. Proposition 20.21) — *Soient*

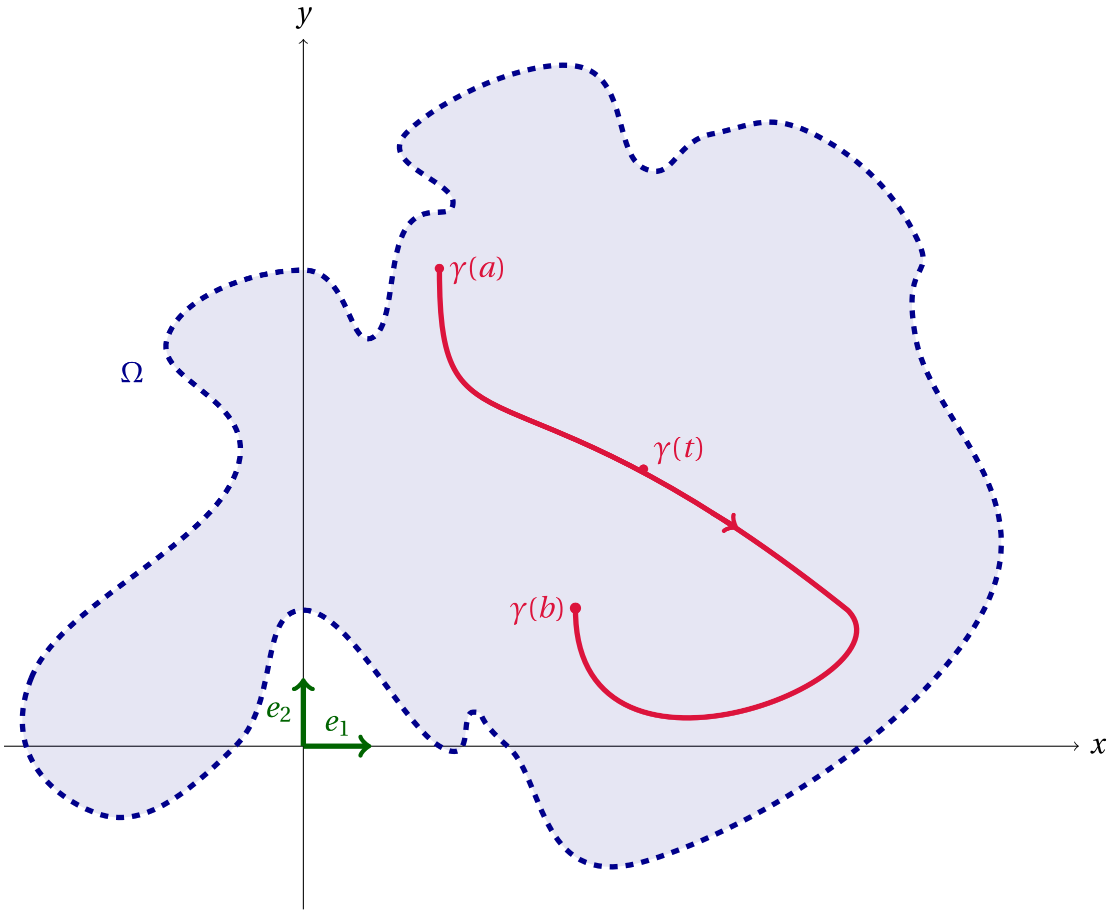
- *I un intervalle de $\mathbb{R}$;*
- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie;*
- *un arc $\gamma \colon I \to E$;*
- *$t_0 \in I$.*

1. *L'arc γ est différentiable en t_0 si et seulement si l'arc γ est dérivable en t_0.*
2. *Si l'arc γ est différentiable en t_0, alors*
   - *la différentielle de γ en t_0 : $d\gamma(t_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, E)$;*
   - *la dérivée de γ en t_0 : $\gamma'(t_0) := \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\gamma(t_0 + t) - \gamma(t_0)}{t} \in E$*

   s'expriment mutuellement l'une en fonction de l'autre comme suit

$$\forall h \in \mathbb{R},\ d\gamma(t_0) \cdot h = h.\gamma'(t_0) \quad \textit{et} \quad \gamma'(t_0) = d\gamma(t_0) \cdot 1\,.$$

Illustration géométrique d'un arc $\gamma\colon [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$



COROLLAIRE 20.38 (Dérivée le long d'un arc) — *Soient*

- *I un intervalle de $\mathbb{R}$;*
- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *un arc $\gamma\colon I \to E$ tel que, pour tout $t \in I$, $\gamma(t) \in \Omega$;*
- *une application $f\colon \Omega \to F$;*
- *$t_0 \in I$.*

On suppose que

(H1) l'arc γ est dérivable en t_0 ;

(H2) l'application f différentiable en $\gamma(t_0)$.

Alors

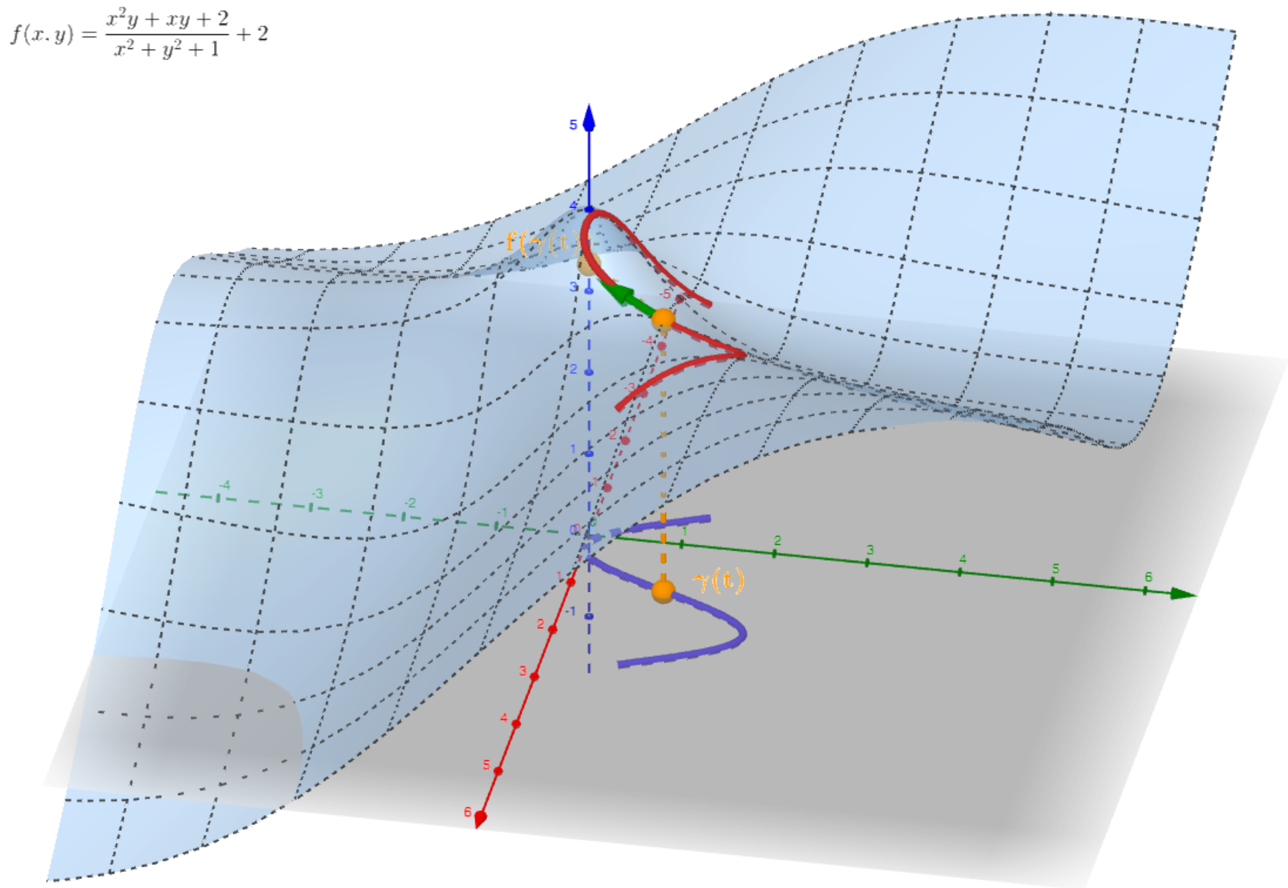
1. *l'arc $f \circ \gamma\colon I \to F$ est dérivable en t_0 ;*
2. *$(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$.*

Démonstration —

- D'après le Rappel 20.37, l'application γ est différentiable en t_0.
- D'après le Théorème 20.36 (composée de deux applications différentiables), l'arc $f\circ\gamma$ est différentiable en t_0 et pour tout $h \in \mathbb{R}$
$$d(f\circ\gamma)(t_0)\cdot h = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\cdot\left(\mathrm{d}\gamma(t_0)\cdot h\right).$$
- D'après le Rappel 20.37, une nouvelle fois, l'arc $f\circ\gamma$ est dérivable en t_0 et
$$(f\circ\gamma)'(t_0) = d(f\circ\gamma)(t_0)\cdot 1 = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\cdot\left(\mathrm{d}\gamma(t_0)\cdot 1\right) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0).$$

Q.E.D.

Interprétation géométrique de la dérivée le long d'un arc. **[Geogebra3D]**



EXEMPLE 20.39 (Dérivée le long d'un segment) — *Soient*

- *I un intervalle de $\mathbb{R}$;*
- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ;*
- *Ω une partie ouverte convexe de E ;*
- *une application $f : \Omega \to E$;*

- *a et b deux points de* Ω.

On suppose que

(H) *l'application* f *différentiable sur* Ω.

Si $\gamma\colon [0,1] \to E$ *est l'application*

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & E \\ t & \mapsto & t.a+(1-t).b \end{array} \right.$$

alors comme pour tout $t \in [0,1]$

$$\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = \frac{(t+h).a+(1-(t+h)).b-(t.a+(1-t).b)}{h} = a-b \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} a-b \in E$$

l'arc γ *est dérivable sur* $[0,1]$ *avec, pour tout* $t \in [0,1]$

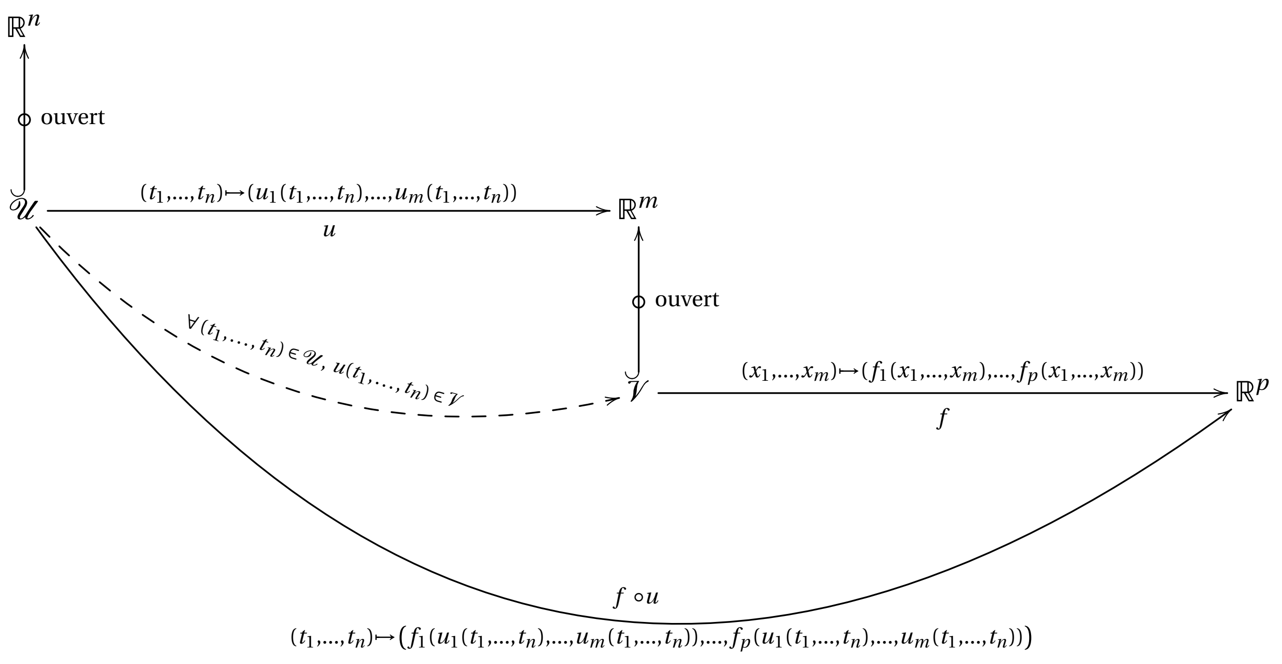
$$\gamma'(t) = a-b\,.$$

Le Corollaire 20.38 s'applique donc et nous savons que

1. *l'arc* $f\circ\gamma$ *est dérivable sur* $[0,1]$ *;*
2. *pour tout* $t \in [0,1]$
$$(f\circ\gamma)'(t) = df(a.t+(1-t).b)\cdot(a-b)$$
i.e.
$$\frac{df(t.a+(1-t).b)}{dt} = df(a.t+(1-t).b)\cdot\frac{d(t.a+(1-t).b)}{dt}\,.$$

9.5 Règle de la chaîne

Nous allons considérer la situation suivante.



THÉORÈME 20.40 (Règle de la chaîne) — *Soient*

- $n \geq 1$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ *des nombres entiers ;*
- $\mathcal{U}$ *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{V}$ *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^m$;
- *une application*
$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^m \\ (t_1,\dots,t_n) & \mapsto & (u_1(t_1,\dots,t_n),\dots,u_m(t_1,\dots,t_n)) \end{array} \right.$$
telle que, pour tout $(t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{U}$, $u(t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{V}$;
- *une application*
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1,\dots,x_m) & \mapsto & (f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_p(x_1,\dots,x_m)) \end{array} \right. ;$$
- $(t_1,\dots,t_n)$ *un point de* $\mathcal{U}$.

On suppose que

(H1) *l'application* u *est différentiable en* $(t_1,\dots,t_n)$;

(H2) *l'application* f *est différentiable en* $u(t_1,\dots,t_n)$.

Alors la fonction

$$g := f\circ u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^p \\ (t_1,\dots,t_n) & \mapsto & \left(\underbrace{f_1(u_1(t_1,\dots,t_n),\dots,u_m(t_1,\dots,t_n))}_{g_1(t_1,\dots,t_n)}, \dots , \underbrace{f_p(u_1(t_1,\dots,t_n),\dots,u_m(t_1,\dots,t_n))}_{g_p(t_1,\dots,t_n)} \right) \end{array} \right.$$

admet des dérivées partielles en $(t_1,\dots,t_n)$ *suivant toutes des variables* $t_1,\dots,t_n$ *et, pour tout* $(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$\boxed{\frac{\partial g_k}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(u_1(t_1,\dots,t_n),\dots,u_m(t_1,\dots,t_n)) \times \frac{\partial u_j}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_n)\,.}$$

REMARQUE 20.41 (Nouvelles écritures de la règle de la chaîne) — *Dans le contexte du Théorème 20.40 précédent, la formule encadrée, appelée règle de la chaîne, peut écrite sous d'autres formes.*

$$\boxed{\frac{\partial f_k(u_1,\dots,u_m)}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(u_1,\dots,u_m) \times \frac{\partial u_j}{\partial t_i} \quad [\textit{écriture abusive}]}$$

$$\boxed{\frac{\partial g_k}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \times \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \quad [\textit{écriture très abusive}]}$$

Démonstration —

- D'après le Théorème 20.36 (composée de deux applications différentiables), la fonction $g := f\circ u$ est différentiable en $t := (t_1,\dots,t_n)$ (donc elle admet des dérivées partielles en t suivant toutes les variables, cf. Proposition 20.14) et
$$\mathrm{d}g(t) = \mathrm{d}(f\circ u)(t) = \mathrm{d}f(u(t)) \circ \mathrm{d}u(t)\,.$$

- Soient $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On en déduit

$$(\star) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}g(t)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}f(u(t)) \circ \mathrm{d}u(t)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_m,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}f(u(t))\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_m,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}u(t)\right)$$

- Or

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\mathrm{d}u(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_1}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n}(t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_2}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_m}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n}(t) \end{pmatrix} \quad \text{[matrice Jacobienne de } u \text{ en } t\text{]}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_m,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}f(u(t))\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(u(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(u(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(u(t)) \end{pmatrix} \quad \left[\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } u(t)\right]$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}\left(\mathrm{d}g(t)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_1}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_n}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_2}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial t_n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_p}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial t_n}(t) \end{pmatrix} \quad \left[\text{matrice Jacobienne de } g \text{ en } t\right]$$

- Donc $(\star)$ livre

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_1}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_n}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_2}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial t_n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial g_p}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial t_n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(u(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(u(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(u(t)) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(u(t)) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(u(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_1}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n}(t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_2}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial u_m}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n}(t) \end{pmatrix}$$

- Soit $(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. En comparant le coefficient d'adresse (k,i) des deux membres de l'identité matricielle précédente, il vient

$$\frac{\partial g_k}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(u(t)) \times \frac{\partial u_j}{\partial t_i}(t)\,.$$

Q.E.D.

EXEMPLE 20.42 (Coordonnées polaires) — *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On lui associe l'application*

$$g \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,. \end{array}\right.$$

On souhaite prouver que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de g.

1. *Soit l'application f définie par*

$$u \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & \left(\underbrace{r\cos(\theta)}_{u_1(r,\theta)}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{u_2(r,\theta)}\right) \end{array}\right.$$

- *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. L'application*

$$u_1(\cdot,\theta) \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & u_1(r,\theta) = r\cos(\theta) \end{array}\right.$$

est linéaire, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u_1 admet une dérivée partielle par rapport à la variable r en tout point $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Elle est donnée par

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & \cos(\theta) \end{array}\right.$$

qui est une fonction <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- *Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. L'application*

$$u_1(r,\cdot) \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & u_1(r,\theta) = r\cos(\theta) \end{array}\right.$$

est un multiple de la fonction cosinus, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u_1 admet une dérivée partielle par rapport à la variable θ en tout point $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Elle est donnée par

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & -r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

qui est une fonction <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. L'application*

$$u_2(\cdot,\theta) \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & u_2(r,\theta) = r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

est linéaire, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u_2 admet une dérivée partielle par rapport à la variable r en tout point $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Elle est donnée par

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & \sin(\theta) \end{array}\right.$$

qui est une fonction <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- *Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. L'application*

$$u_2(r,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & u_2(r,\theta) = r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

est un multiple de la fonction sinus, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi u_2 admet une dérivée partielle par rapport à la variable θ en tout point $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Elle est donnée par

$$\frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & r\cos(\theta) \end{array} \right.$$

qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction u est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, par composition des applications différentiables, la fonction

$$f \circ u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(u(r,\theta)) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = g(r,\theta) \end{array} \right.$$

qui n'est autre que l'application g, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2. *D'après la règle de la chaîne, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial u_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial u_2}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \cos(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial u_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &= -r\sin(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{aligned}$$

10 Applications numériques différentiables

10.1 Théorème de représentation des formes linéaires de Riesz

LEMME 20.43 (Construction de formes linéaires sur un espace euclidien) — *Soient*

- $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geq 1$ *;*
- $x \in E$.

Alors l'application $\langle x, \cdot \rangle$ *définie par*

$$\langle x, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur E.

Démonstration — Soient $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\langle x, \lambda_1.y_1 + \lambda_2.x_2 \rangle \quad = \quad \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle \quad \text{[linéarité du produit scalaire à droite.]}$$

Q.E.D.

THÉORÈME 20.44 (Théorème de représentation des formes linéaires de Riesz) — *Soit* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geq 1$.
Alors l'application

$$\iota \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. En particulier, pour toute forme linéaire φ *sur* E*, il existe un unique* $x \in E$ *tel que*

$$\forall\, y \in E, \quad \varphi(y) = \langle x, y \rangle\,.$$

Démonstration —

- **Linéarité de ι.**
  Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Les applications

  $$\iota(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2) = \langle \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2, \cdot \rangle \qquad \text{et} \qquad \lambda_1.\iota(x_1) + \lambda_2.\iota x_2 = \lambda_1.\langle x_1, \cdot \rangle + \lambda_2.\langle x_2, \cdot \rangle$$

  ont comme source E et comme but $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $y \in E$

  $$\begin{array}{rcll} \iota(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2)(y) & := & \langle \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2, y \rangle & \\ & = & \lambda_1.\langle x_1, y \rangle + \lambda_2.\langle x_2, y \rangle & \text{[linéarité du produit scalaire à gauche]} \\ & = & \lambda_1.\iota(x_1)(y) + \lambda_2.\iota(x_2)(y) & \\ & =: & (\lambda_1.\iota(x_1) + \lambda_2.\iota(x_2))(y) & \end{array}$$

  Donc les applications $\iota(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2)$ et $\lambda_1.\iota(x_1) + \lambda_2.\iota(x_2)$ sont égales.

- **Injectivité de ι.**
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(\iota)$. Comme $\iota(x) = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$, on a, pour tout $y \in E$

  $$0 = \iota(x)(y) = \langle x, y \rangle\,.$$

  En spécifiant à $y \leftarrow x$, il vient $\langle x, x \rangle = 0$. Par le caractère défini du produit scalaire, on en déduit $x = 0_E$.

- **Surjectivité de ι, à l'aide des dimensions finies égales.**
  Comme
  $$\dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n \times 1 = n = \dim(E) < \infty$$
  nous déduisons des deux points précédents que ι est un isomorphisme.

Q.E.D.

EXEMPLE 20.45 (**Illustration du Théorème de représentation des formes linéaires de Riesz**) **—** *On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini par*

$$\forall\,(A,B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \langle\, A\,,\, B\,\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{1\leq i,j\leq 2} [A]_{i,j}\,[B]_{i,j}\;.$$

Soit φ la forme linéaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à une matrice la somme de ses coefficients, i.e.

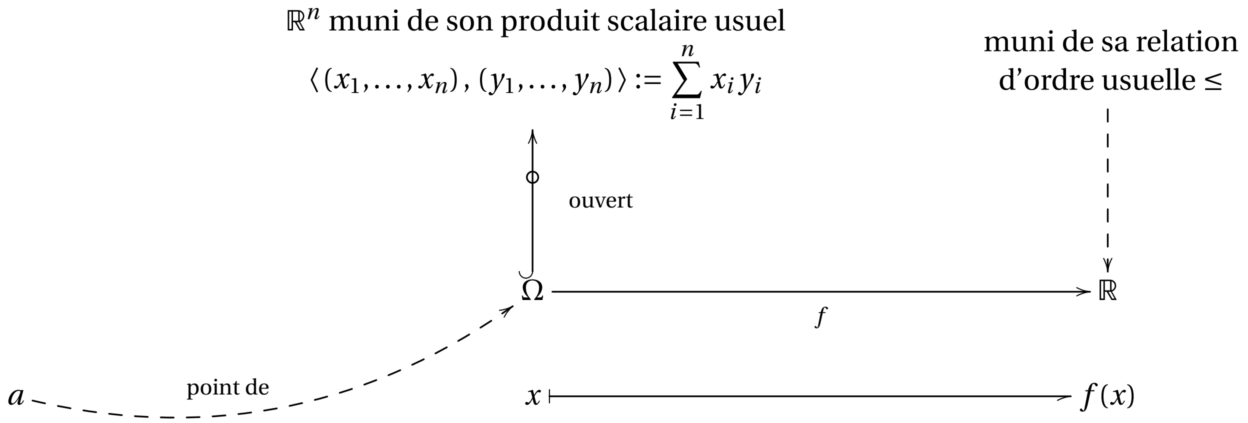
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq 2} [A]_{i,j}\;. \end{array}\right.$$

Alors l'application φ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i.e.

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A \right\rangle.$$

10.2 Gradient d'une application numérique différentiable

On considère la situation suivante.



DÉFINITION 20.46 (Gradient d'une application numérique différentiable) — *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier ;*
- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$, *défini par pour tout* $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,;$$

- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- a *un point de* Ω *;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application différentiable en* a.

D'après le Théorème de représentation des formes linéaires de Riesz (Théorème 20.44), appliqué à $df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *il existe un unique vecteur de* $\mathbb{R}^n$, *appelé gradient de* f *en* a *et noté* $\nabla f(a)$, *tel que pour tout* $h \in \mathbb{R}^n$

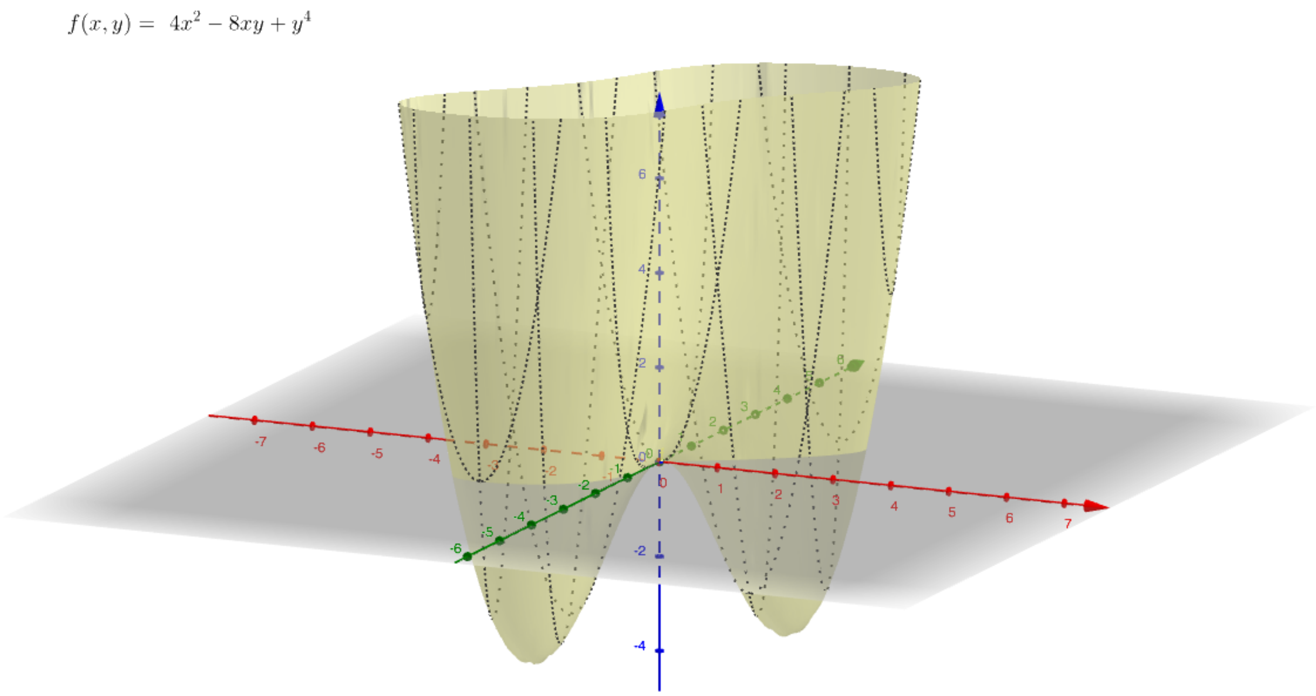
$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle \,.$$

EXEMPLE 20.47 (La molaire - Épisode 1) — *Soit l'application* f *définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 4x^2 - 8xy + y^4 \end{array} \right.$$

dont la représentation est donnée ci-dessous.

Graphe de la fonction f. [Geogebra3D]



- **Étude de la dérivée partielle de f par rapport à x.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction
  $$f(\cdot, y): x \mapsto f(x,y) = 4x^2 - 8xy + y^4$$
  est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$, qui est donnée par
  $$\frac{\partial f}{\partial x} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 8x - 8y = 8(x-y) \end{array} \right.$$
  qui est une fonction <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- **Étude de la dérivée partielle de f par rapport à y.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction
  $$f(x, \cdot): y \mapsto f(x,y) = 4x^2 - 8xy + y^4$$
  est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à y sur $\mathbb{R}^2$, qui est donnée par
  $$\frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 4y^3 - 8x = 4(y^3 - 2x) \end{array} \right.$$
  qui est une fonction <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et, d'après l'expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*
  $$df(x,y)\cdot(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ h_2 = 8(x-y)\ h_1 + 4(y^3-2x)\ h_2 = \langle\,(8(x-y), 4(y^3-2x))\,,\,(h_1,h_2)\,\rangle\,.$$
  On en déduit que
  $$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = (8(x-y), 4(y^3-2x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\,.$$

PROPOSITION 20.48 (**Gradient d'une application numérique différentiable via les dérivées partielles**) **—** *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier;*
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, défini par pour tout $(x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$*
  $$\langle\,(x_1,\dots,x_n)\,,\,(y_1,\dots,y_n)\,\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\,;$$
- Ω *une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- a *un point de Ω ;*
- $f: \Omega \to \mathbb{R}\,;\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,\dots,x_n)$ *une application différentiable en a.*

Alors
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\dots,a_n)\right) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Démonstration — D'après la Proposition 20.23 (expression de la différentielle d'une application différentiable via ses dérivées partielles, pour tout $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a_1,\dots,a_n)\cdot(h_1,h_2,\dots,h_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\dots,a_n)\,h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\dots,a_n)\,h_n \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\dots,a_n) \right), (h_1,h_2,\dots,h_n) \right\rangle . \end{aligned}$$

On en déduit

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\dots,a_n)\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,\dots,a_n) \right) .$$

Q.E.D.

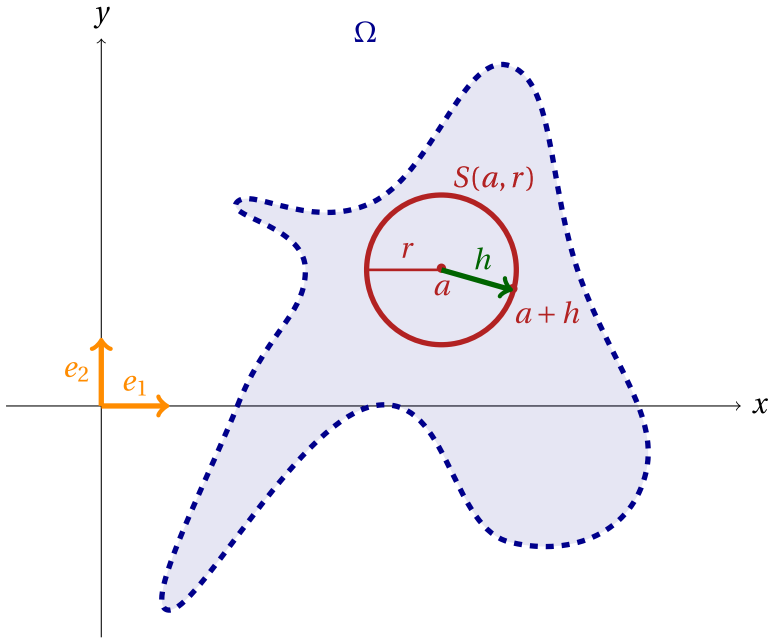
Remarque 20.49 (Interprétation géométrique du gradient) — *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier ;*
- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$, *défini par pour tout* $(x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\langle (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,;$$
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- a *un point de* Ω *;*
- r *un nombre réel strictement positif tel que* $\overline{B(a,r)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| \leq r \right\} \subset \Omega$ *;*
- $S(0_{\mathbb{R}^n}, r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = r \right\}$, *la sphère de centre* $0_{\mathbb{R}^n}$ *et de rayon* r *;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,\dots,x_n)$ *une application différentiable en* a *telle que* $\underline{df(a) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}}$, *i.e. telle que* $\underline{\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}}$.

On s'intéresse à l'accroissement maximal de f, *lorsque qu'on se déplace d'une distance* r *à partir de* a, *i.e. à*

$$\boxed{\text{la valeur maximale de } f(a+h) - f(a) \text{ lorsque } h \text{ décrit la sphère } S(0_{\mathbb{R}^n}, r)\ .}$$

Déplacement d'une distance r à partir du point a



- **Approximation donnée par la différentielle de f en a.**
Soit $h \in S(0_{\mathbb{R}^n}, r)$. Comme f est différentiable en a

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|).$$

On en déduit
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\langle \nabla f(a), h\rangle + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(1)$$
puis, comme $\|h\| = r$
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{r} = \frac{1}{r}\langle \nabla f(a), h\rangle + \underset{r\to 0_{\mathbb{R}}}{o}(1).$$
En supposant r « très petit », on a l'approximation

$$(\star)\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{r} \approx \frac{1}{r}\langle \nabla f(a), h\rangle.$$

- **Approximation donnée par la différentielle de f en a.**
Grâce à l'approximation $(\star)$, lorsque h décrit la sphère $S(0_{\mathbb{R}^n}, r)$, pour r « très petit »

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{r} \text{ est maximal} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{r}\langle \nabla f(a), h\rangle \text{ est maximal}$$

i.e.
$$f(a+h)-f(a) \text{ est maximal} \quad\Longleftrightarrow\quad \langle \nabla f(a), h\rangle \text{ est maximal}.$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité**
Si $h \in S(0, r)$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\langle \nabla f(a), h\rangle\right| \leq \left\|\nabla f(a)\right\| \, \|h\| = r\, \left\|\nabla f(a)\right\|$$

et il y a égalité dans la précédente égalité si et seulement si $\nabla f(a)$ et h sont colinéaires, i.e., comme $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, si et seulement si
$$h = \pm\, r\, \frac{\nabla f(a)}{\left\|\nabla f(a)\right\|}.$$

- **Conclusion**
De l'étude précédente, on déduit que, lorsque h décrit la sphère $S(0_{\mathbb{R}^n}, r)$, pour r « très petit »

$$\boxed{f(a+h)-f(a) \text{ est maximal} \quad\Longleftrightarrow\quad h = r\, \frac{\nabla f(a)}{\left\|\nabla f(a)\right\|}}.$$

EXEMPLE 20.50 (La molaire - Épisode 2) — *On considère de nouveau l'application f définie par*

$$f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 4x^2 - 8xy + y^4. \end{array}\right.$$

Nous avons établi (cf. Exemple 20.47) que f est différentiable et que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(8(x-y)\,,\, 4\left(y^3 - 2x\right)\right).$$

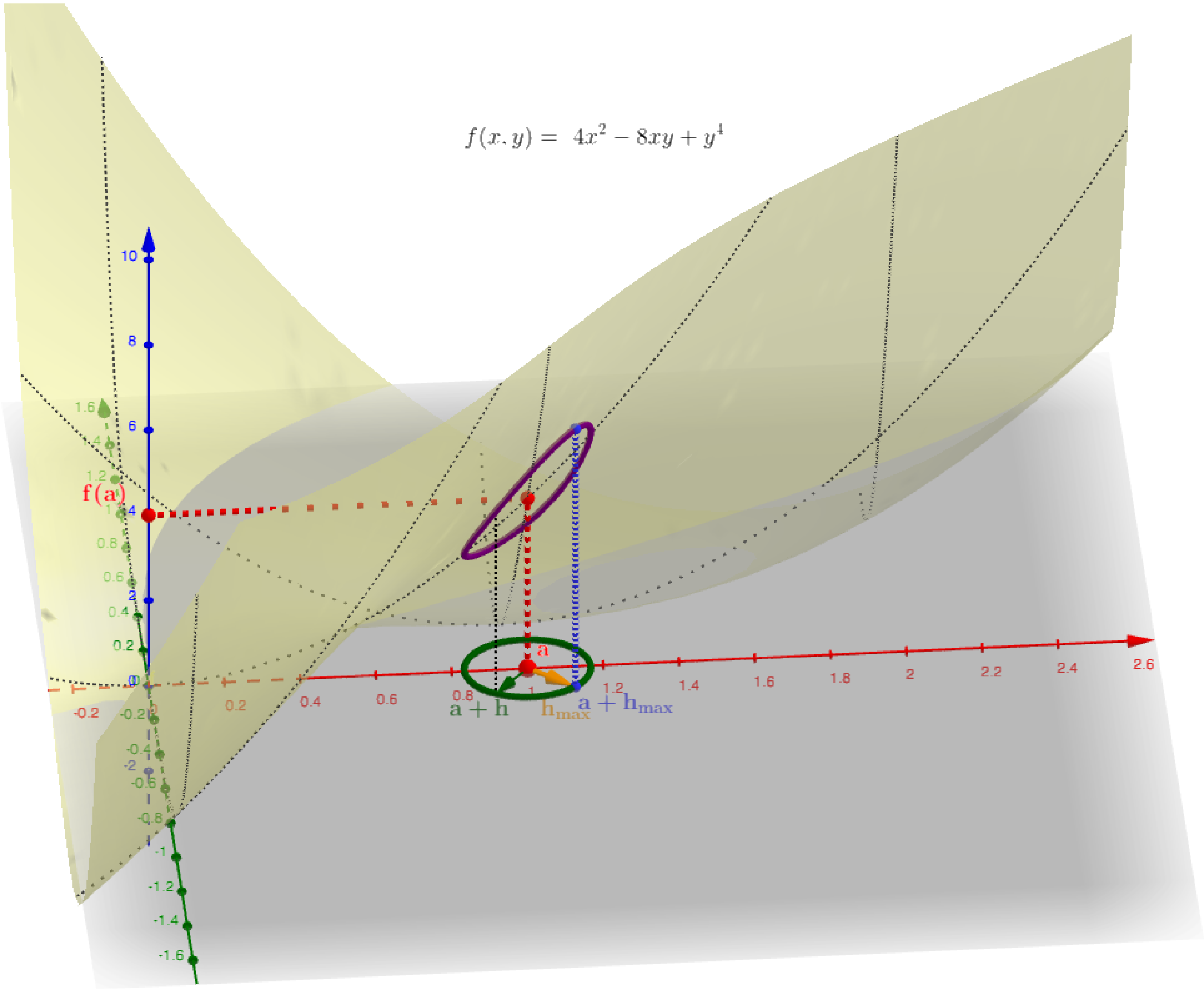
En particulier, au point $(1,0)$
$$\nabla f(1,0) = (8,-8).$$

Ainsi lorsque h décrit la sphère $S((0,0),r)$, pour r « très petit », l'accroissement $f(a+h)-f(a)$ est maximal lorsque

$$h = h_{max} := \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$$

ce qui est en accord avec la figure ci-dessous.

Interprétation géométrique du gradient. [Geogebra3D]



10.3 Condition nécessaire d'existence d'extremum local

On considère la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \text{ muni de son produit scalaire usuel} \\ \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{array} & \begin{array}{c}\text{muni de sa relation} \\ \text{d'ordre usuelle } \leq\end{array} \arrow[d, dashed] \\
\Omega \arrow[u, hook, "\text{ouvert}"'] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x)
\end{tikzcd}$$

et on cherche à étudier l'existence éventuel d'un extremum local pour f.

DÉFINITION 20.51 (Extremum local) — *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- $a \in \Omega$*;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

On dit que la fonction f

1. *admet un minimum local atteint au point a si*

$$\exists\, r > 0, \quad B(a,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x-a\| < r\right\} \subset \Omega \quad \textit{et} \quad \forall\, x \in B(a,r), \quad f(x) \geq f(a) \ .$$

2. *admet un maximum local atteint au point a si*

$$\exists\, r > 0, \quad B(a,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x-a\| < r\right\} \subset \Omega \quad \textit{et} \quad \forall\, x \in B(a,r), \quad f(x) \leq f(a) \ .$$

3. *admet un extremum local atteint au point a si la fonction f admet un minimum local atteint au point a ou si la fonction f admet un maximum local atteint au point a.*

DÉFINITION 20.52 (Extremum global) — *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- $a \in \Omega$*;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

On dit que la fonction f

1. *admet un minimum global atteint au point a si*

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f(x) \geq f(a) \ .$$

2. *admet un maximum global atteint au point a si*

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq f(a) \ .$$

3. *admet un extremum global atteint au point a si la fonction f admet un minimum global atteint au point a ou si la fonction f admet un maximum global atteint au point a.*

EXEMPLE 20.53 (Fonction admettant un minimum local, non global) — *Soit f la fonction définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2+2-y^4 \,. \end{array} \right.$$

- *Pour tout* $(x,y) \in B((0,0),1) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$, $|y| < 1$ *et donc*

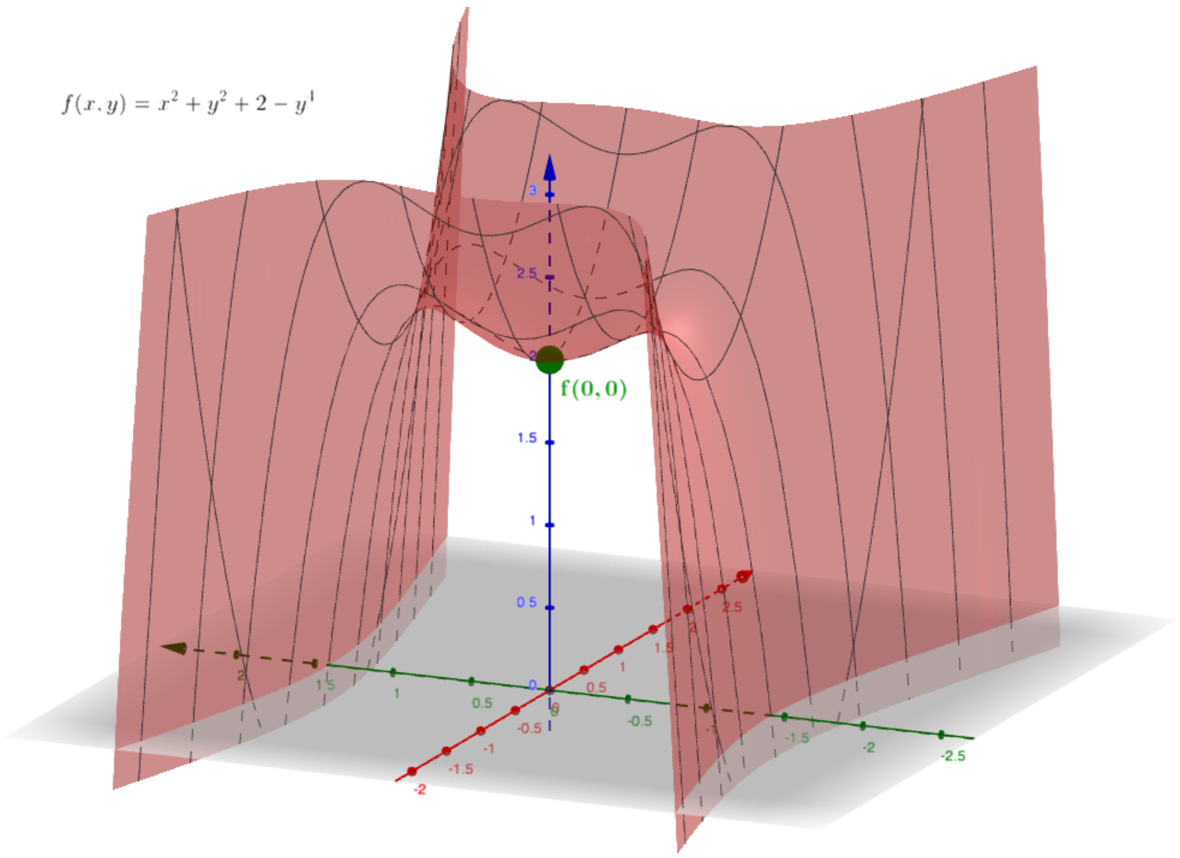
$$f(x,y) = 2 + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} \underbrace{(1-y^2)}_{\geq 0} \geq 2 = f(0,0) \ .$$

Donc f admet un minimum local, valant 2, au point $(0,0)$.

- *La fonction f n'admet pas de mimimum global sur* $\mathbb{R}^2$ *car*

$$f(0,y) = y^2 - y^4 \underset{y\to+\infty}{\sim} -y^4 \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty.$$

Illustration graphique du minimum local, non global, de f atteint en $(0,0)$ **[Geogebra3D]**



- *Comme la fonction f est polynomiale en les variables x et y, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$). Ses dérivées partielles sont données par, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-4y^3$$

d'où pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(2x,2y-4y^3\right)\,.$$

On observe qu'au point $(0,0)$, où la fonction f atteint un minimum local, le gradient de f est nul et donc sa différentielle également

$$df(0,0)=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}\,.$$

DÉFINITION 20.54 (Point critique d'une application différentiable) — *Soient*

- *$n\geq 1$ un nombre entier;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *$a\in\Omega$*
- *$f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable en a.*

Le point a est appelé point critique de f si

$$df(a)=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$$

ou, de manière équivalente si

$$\nabla f(a)=0_{\mathbb{R}^n}\,.$$

EXEMPLE 20.55 (La molaire - Épisode 3) — *On considère de nouveau l'application f définie par*

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & 4x^2-8xy+y^4\,.\end{array}\right.$$

Nous avons établi (cf. Exemple 20.47) que f est différentiable et que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y)=\left(8(x-y)\,,\,4\left(y^3-2x\right)\right)\,.$$

Donc un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un point critique de f si seulement si

$$x-y=0 \quad \textit{et} \quad y^3-2x=0\,.$$

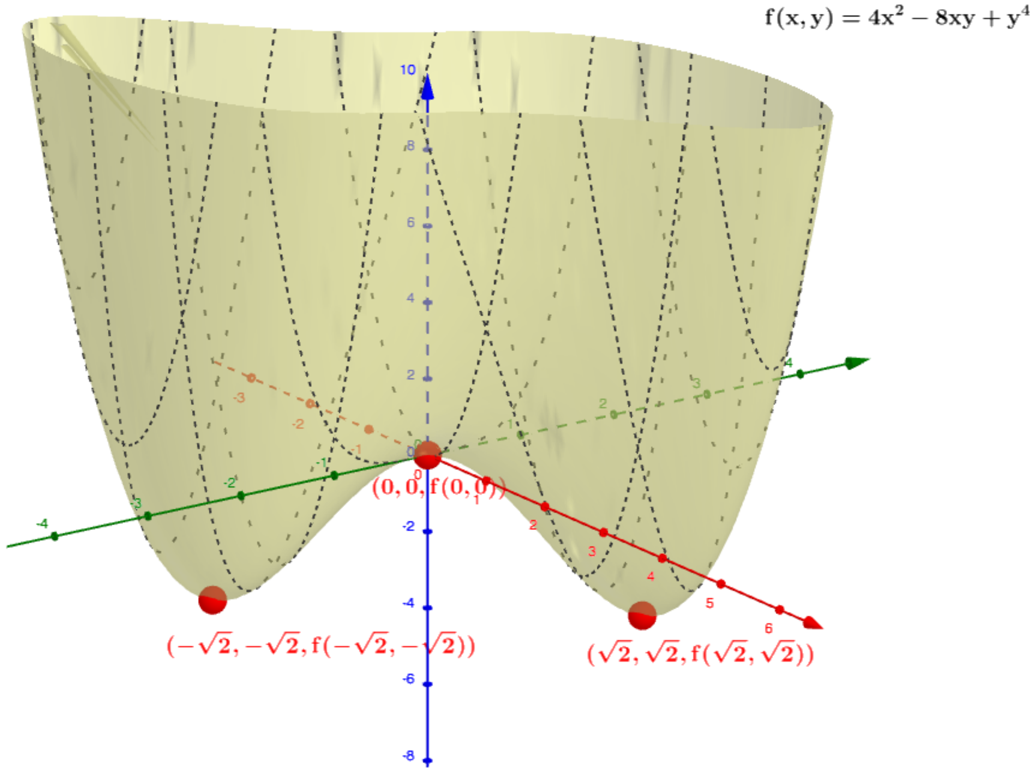
On résout ce système (non linéaire). Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x-y=0 \quad \textit{et} \quad y^3-2x=0 &\iff x=y \quad \textit{et} \quad y^3-2y=0\\ &\iff x=y \quad \textit{et} \quad y(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})=0\,.\end{aligned}$$

Donc la fonction f possède trois points critiques :

$$(0,0) \quad ; \quad \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad ; \quad \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\,.$$

Illustration graphique des trois points critiques de f [Geogebra3D]



THÉORÈME 20.56 (**Condition nécessaire d'existence d'extremum local**) — *Soient*

- $n \geq 1$ *un nombre entier;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* Ω *;*
- $a \in \Omega$.

Si la fonction f atteint un extremum local en a, alors a est un point critique de f, i.e. $df(a) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$ *ou de manière équivalente* $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration —

- Supposons que la fonction f atteint un minimum local en a. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et, pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$. Ainsi,

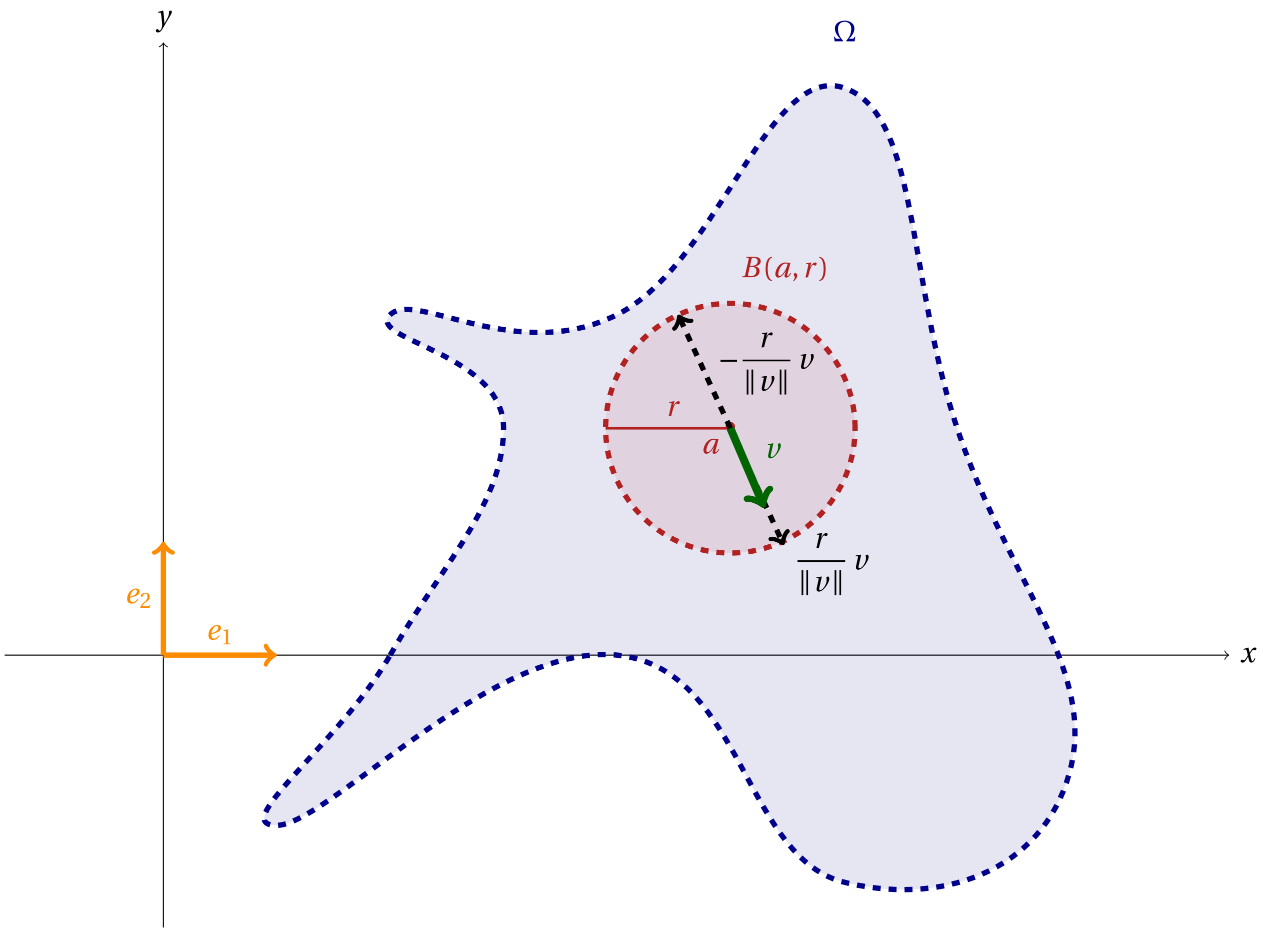
$$\forall\, h \in B\,(0_{\mathbb{R}^n}, r) \quad a + h \in \Omega \quad \text{et} \quad f(a+h) \geq f(a)\,.$$

- Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Comme la fonction f est différentiable en a, elle admet une dérivée en a suivant la direction v et de plus

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v\,.$$

Cf. Proposition 20.14. On observe que pour tout $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$, le vecteur tv appartient à $B\left(0_{\mathbb{R}^n}, r\right)$.

Le point a peut être approché des deux côtés, suivant la direction v.



Soit $t \in \left]0, \frac{r}{\|v\|}\right[$.

$$0 \leq \frac{\overbrace{f(a+tv)-f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v\,.$$

On en déduit : $(\star)$ $\quad \mathrm{d}f(a)\cdot v \geq 0$.

Soit $t \in \left]-\frac{r}{\|v\|}\,;0\right[$.

$$0 \geq \frac{\overbrace{f(a+tv)-f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \xrightarrow[t \to 0^-]{} \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v\,.$$

On en déduit : $(\star\star)$ $\quad \mathrm{d}f(a)\cdot v \leq 0$.

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit que $\mathrm{d}f(a)\cdot v = 0$.

- Nous avons établi que

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \quad \mathrm{d}f(a)\cdot v = 0\,.$$

Comme l'application $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire, $\mathrm{d}f(a)\cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0$. L'application $\mathrm{d}f(a)$ est donc la forme linéaire nulle sur $\mathbb{R}^n$.

Q.E.D.

REMARQUE 20.57 —

> *La condition nécessaire d'existence d'extremum local n'est pas suffisante.*

- *On considère la fonction cube définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right. .$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$*, avec une dérivée donnée par, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f'(x) = 3x^2$.

- *D'après la Proposition 20.21, la fonction* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$df(x) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & 3\,x^2\,h \end{array} \right. .$$

- *Donc* 0 *est un point critique de* f*, mais la fonction* f *n'atteint pas un extremum local en* 0*, puisque*

$$\forall\ x < 0,\ f(x) < 0 = f(0) \qquad \textit{et} \qquad \forall\ x > 0,\ f(x) > 0 = f(0)\ .$$

EXEMPLE 20.58 (La molaire - Épisode 4) — *On considère de nouveau l'application* f *définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 4x^2 - 8xy + y^4 \end{array} \right. .$$

On se propose d'étudier les extrema locaux éventuels de f.

- *Dans l'Exemple 20.47, nous avons démontré que* f *est différentiable et que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(8(x-y)\,,\,4\left(y^3 - 2x\right)\right)\ .$$

- *Dans l'Exemple 20.55, nous avons déterminé les points critiques de la fonction* f*. Ceux-ci sont*

$$(0,0) \quad ; \quad \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad ; \quad \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\ .$$

- *D'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum local (Théorème 20.56), si* f *atteint un extremum local en un point* a *de* $\mathbb{R}^2$*, alors*

$$a \in \left\{(0,0)\,,\,\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\,,\,\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}\ .$$

Il y a donc trois cas à étudier.

- **Étude de f au voisinage du point $(0,0)$.**
Comme

$$\forall\ t \in \mathbb{R}^*, \qquad f(t,0) = 4t^2 > 0 = f(0,0)$$

et

$$\forall\ t \in \left]-\sqrt{2},0\right[\cup \left]0,\sqrt{2}\right[, \qquad f(t,t) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2-4) < 0 = f(0,0)$$

la fonction f *n'atteint pas un extremum local en* $(0,0)$.

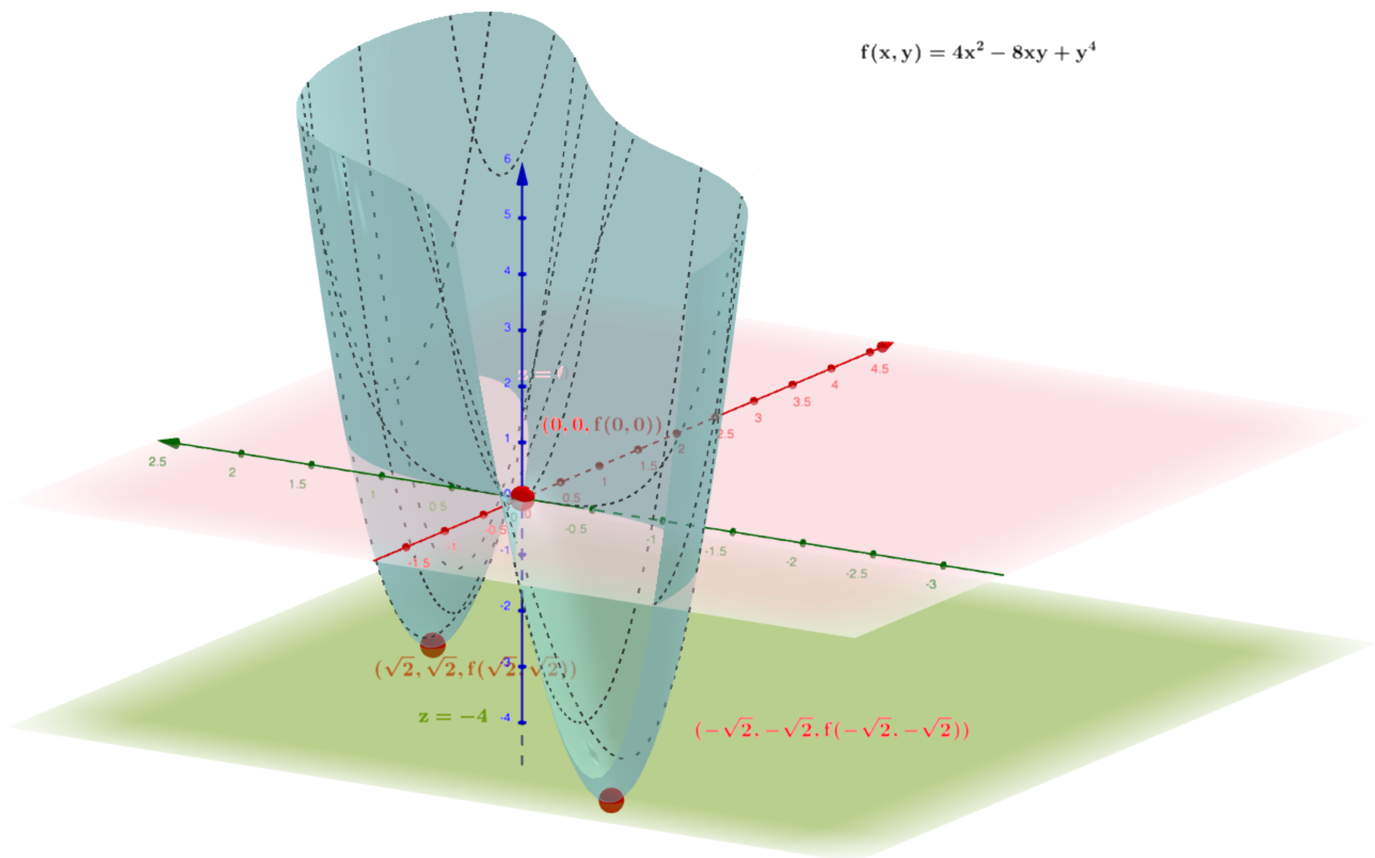
- **Étude de f au voisinage du point $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.**
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f\left(x+\sqrt{2},y+\sqrt{2}\right) &= 4\left(x+\sqrt{2}\right)^2-8\left(x+\sqrt{2}\right)\left(y+\sqrt{2}\right)+\left(y+\sqrt{2}\right)^4\\
&= 4x^2+8\sqrt{2}x+8-8xy-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y-16+y^4+4\sqrt{2}y^3+12y^2+8\sqrt{2}y+4\\
&= 4x^2-8xy-4+y^4+4\sqrt{2}y^3+12y^2\\
&= 4\left(\left(x-y\right)^2-y^2\right)-4+y^4+4\sqrt{2}y^3+12y^2 \quad [\textit{forme canonique d'un trinôme}]\\
&= 4\left(x-y\right)^2-4+y^2\left(y^2+4\sqrt{2}y+8\right)\\
&= \underbrace{4\left(x-y\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{y^2\left(y+2\sqrt{2}\right)^2}_{\geq 0}+f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad \left[f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-4\right]
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f atteint un minimum global en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, valant -4.

- **Étude de f au voisinage du point $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.**
Comme $f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-4$, nous savons, d'après le calcul précédent que On en déduit que f atteint un minimum global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, valant -4.

Illustration graphique de la nature des trois points critiques de f [Geogebra3D]



10.4 Méthode générale pour étudier les extrema locaux d'une fonction

On considère la situation suivante

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \text{ muni de son produit scalaire usuel} \\ \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{array} & \begin{array}{c}\text{muni de sa relation} \\ \text{d'ordre usuelle } \leq\end{array} \arrow[d, dashed] \\
A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

et on s'intéresse à l'étude des extrema de la fonction f.

Étape 1 : Propriétés topologiques de $A \subset \mathbb{R}^n$.

- On étudie la nature topologique de $A \subset \mathbb{R}^n$, i.e. on détermine si A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ ou si A est compacte, par exemple.
- Si A est compacte et f est continue sur A, alors d'après le Théorème des bornes atteintes, la fonction f possède un minimum et un maximum sur A.

Étape 2 : Différentiabilité de l'application f sur $\mathring{A}$.

- On démontre que l'application f est différentiable sur l'intérieur $\mathring{A}$ de A, qui est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans A. Pour ce faire, on peut s'appuyer sur les propriétés suivantes.
  * Une fonction polynomiale en n variables est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
  * Une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) en n variables est différentiable sur son ensemble de définition, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
  * Critère $\mathscr{C}^1$.

Étape 3 : Calcul de la différentielle ou gradient de l'application f sur $\mathring{A}$.

On explicite la différentielle de f sur $\mathring{A}$, ou ce qui revient au même son gradient, en calculant les dérivées partielles de f. Pour tout $a \in \mathring{A}$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Étape 4 : Détermination des points critiques de f sur $\mathring{A}$.

On détermine les points critiques de f sur $\mathring{A}$, en résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) & = & 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $a \in \mathring{A}$. On préférera raisonner par analyse et synthèse pour ce faire.

Étape 5 : Détermination du lieu d'étude et analyse de la nature des points critiques.
On suppose que la fonction f atteint un extremum local en un point a de A.

- Si $a \in A \setminus \overset{\circ}{A}$ (cas impossible si A est ouverte dans $\mathbb{R}^n$), alors nous disposons pas d'outil au programme permettant d'attaquer l'étude. On peut cependant chercher à analyser le signe de

$$f(x) - f(a)$$

pour $x \in A$, en développant, en ordonnant, en simplifiant.

- Si $a \in \overset{\circ}{A}$ qui est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, alors la condition nécessaire d'existence d'un extremum local s'applique. Le point a est nécessairement un point critique de f, dont la liste a été établie à l'étape 4.

  Pour étudier la nature d'un point critique $a \in \overset{\circ}{A}$, i.e. déterminer si

  . f atteint un minimum local en a;
  . f atteint un minimum global en a;
  . f atteint un maximum local en a;
  . f atteint un maximum global en a;
  . f n'atteint aucun extremum local donc aucun extremum global en a;

  on étudie le signe de

$$f(x) - f(a) \qquad \text{ou} \qquad f(a+h) - f(a)$$

  pour x dans A et h dans un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$. On peut envisager deux grandes stratégies (il y en a d'autres).

  (a) Chercher à démontrer que $f(x) - f(a)$ a un signe constant en développant, en réduisant et en simplifiant, parfois à l'aide de la forme canonique d'un trinôme du second degré ou d'études de fonctions d'une variable réelle.
  (b) Chercher à démontrer que $f(a+h) - f(a)$ n'a de signe constant dans aucun voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$, parfois à l'aide de développements limités en introduisant un arc bien choisi pour approcher $0_{\mathbb{R}^n}$ avec un unique paramètre.

Étape 6 : Extrema globaux (éventuellement).

- Comme indiqué précédemment, on peut s'appuyer sur de la compacité et de la continuité pour démontrer l'existence d'extrema globaux, grâce au Théorème des bornes atteintes.
- On peut essayer d'introduire un arc bien choisi, tracé sur A, dont l'image par f explose vers $-\infty$ ou $+\infty$.

REMARQUE 20.59 (**Matrice Hessienne**) — *Il existe une méthode puissante, qui repose sur une matrice appelée matrice Hessienne, qui permet souvent d'analyser plus efficacement la nature d'un point critique lorsque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$. Elle est hors programme, mais nous l'aborderons plus tard en exercice.*