

Chapitre 20

Calcul différentiel

Table des matières

1	Extrait du programme relatif à ce chapitre	2
2	Introduction	5
2.1	Fonctions étudiées en MPSI	5
2.1.1	Calcul différentiel	5
2.1.2	Condition nécessaire pour être un extremum local	5
2.1.3	Un lien avec le calcul intégral	5
2.2	Fonctions étudiées en MP jusque là	6
2.2.1	Calcul différentiel	6
2.2.2	Un lien avec le calcul intégral	6
2.2.3	Inégalité des accroissements finis	7
2.3	Fonctions étudiées en MP dans ce chapitre	7
2.3.1	Taux d'accroissement non défini	7
2.3.2	Calcul différentiel	7
2.3.3	Théorème fondamental (Critère \mathcal{C}^1)	8
2.3.4	Condition nécessaire pour être un extremum local	8
2.4	Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles	9
2.4.1	Le graphe de la fonction f	9
2.4.2	Si f est continue son graphe est une surface (sens intuitif)	10
2.4.3	Exemple d'étude d'extrema d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	12
3	Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles	13
3.1	Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$	13
3.2	Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle	14
3.3	Dérivées partielles	16
4	Différentiabilité et différentielle en un point	18
4.1	Notation de Landau	18
4.2	Présentation du contexte général	18
4.3	Application différentiable en un point	19
4.4	La différentiabilité en a entraîne la continuité en a	20
4.5	Une application différentiable en a admet des dérivées dans toutes les directions en a	21
4.6	Différentielle en a d'une application différentiable en a	24
4.7	Synthèse sur la continuité, les dérivées directionnelles et la différentiabilité	25
5	Deux exemples élémentaires d'applications différentiables	27
5.1	Différentiabilité et différentielle d'une application constante	27
5.2	Différentiabilité et différentielle d'une restriction d'application linéaire	27
6	Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	29
6.1	Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m	29
6.2	Différentielle d'une fonction différentiable définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n via ses dérivées partielles	30
6.3	Matrice Jacobienne	31

1 Extrait du programme relatif à ce chapitre

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur \mathbb{R} . Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles dans une base.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$ est autorisée.

Différentielle

Application différentiable au point a .

Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . Relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.

Notations $df(a)$, $df(a) \cdot v$.

Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω .

Notation df .

Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $df(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f, g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.

On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u, v) , on ait $\|B(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de \mathbb{R} , dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$.

Cas des applications numériques

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X , tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E , si X est une ligne de niveau de f , alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x .

Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne.

Le théorème des fonctions implicites est hors programme. PC : électrostatique.

Applications de classe \mathcal{C}^1

Une application f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω .

L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration non exigible.

Si f est une application de classe \mathcal{C}^1 de Ω dans F , si γ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω .

Démonstration pour Ω convexe.

Applications de classe \mathcal{C}^k

Dérivées partielles d'ordre k .

Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$.

Une application est dite de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω .

La notion de différentielle seconde est hors programme. PC : laplacien.

Théorème de Schwarz.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^k . Composition d'applications de classe \mathcal{C}^k .

Démonstrations non exigibles.

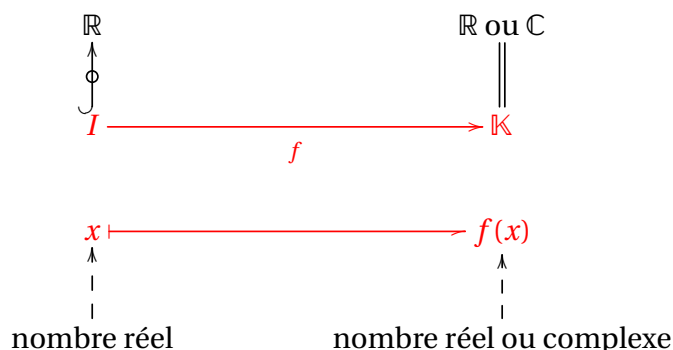
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas attendu. PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

2 Introduction

2.1 Fonctions étudiées en MPSI

Les fonctions étudiées en MPSI étaient de la forme suivante.



2.1.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \rightarrow a]{\mathbb{K}} \ell$;
- si f est dérivable en a , alors son nombre dérivé en a est défini par

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad [\text{nombre dans } \mathbb{K}].$$

2.1.2 Condition nécessaire pour être un extremum local

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I ;
- f admet un extremum local en un point a de I

alors $f'(a) = 0$. On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f .

Remarque. Le fait que I soit ouvert est essentiel. En effet, la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 1 \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[0, 1]$ et admet un extremum local (et même global) en 0 et en 1. Mais en ces deux points, la dérivée égale 2.

2.1.3 Un lien avec le calcul intégral

Si

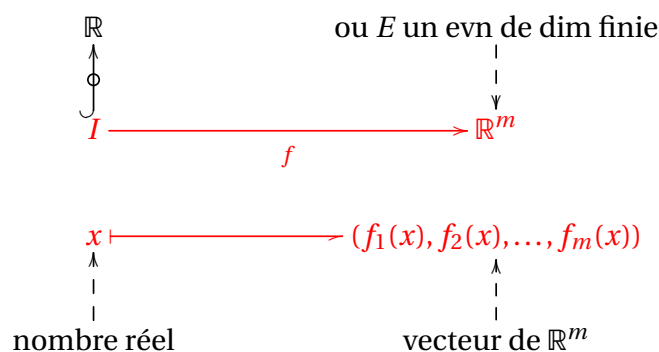
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

2.2 Fonctions étudiées en MP jusque là

Les fonctions étudiées dans le chapitre 17 « Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie » sont de la forme suivante



où $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$f_i \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_i(x) \end{array} \right.$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i -ième coordonnée), donc du type de celles étudiées en MPSI.

2.2.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \rightarrow a]{\mathbb{R}^m} \ell \text{ ce qui équivaut à, pour tout } i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} \xrightarrow[x \rightarrow a]{\mathbb{R}} \ell_i;$$

- si f est dérivable en a , alors son vecteur dérivé en a est défini par

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (f'_1(a), \dots, f'_m(a)) \quad [\text{vecteur de } \mathbb{R}^m].$$

2.2.2 Un lien avec le calcul intégral

Si

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad [\text{égalité entre vecteurs de } \mathbb{R}^m]$$

i.e.

$$\left(\int_a^b f'_1(x) dx, \dots, \int_a^b f'_m(x) dx \right) = (f_1(b) - f_1(a), \dots, f_m(b) - f_m(a)).$$

2.2.3 Inégalité des accroissements finis

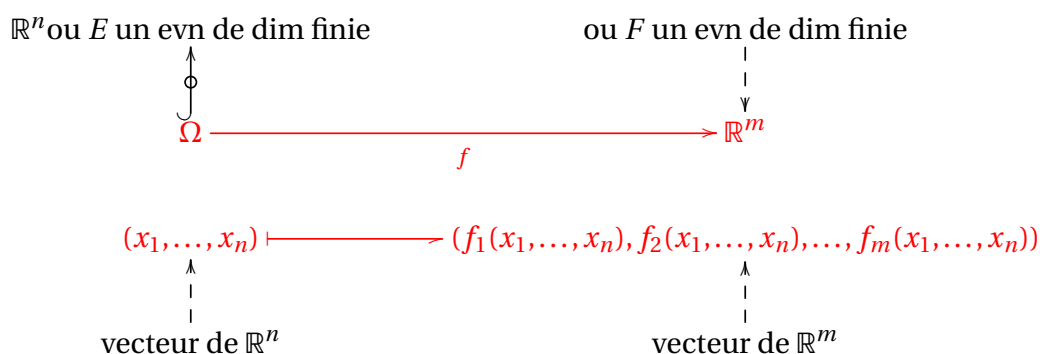
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I avec une dérivée f' bornée sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors $\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in I} \|f'(x)\| \right) |b - a|$.

2.3 Fonctions étudiées en MP dans ce chapitre

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont de la forme suivante.



Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$f_i \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ \cup \\ \Omega \end{array} \right. \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i -ième coordonnée), jamais encore étudiée.

2.3.1 Taux d'accroissement non défini



si $a, x \in \Omega$, alors l'objet $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'est pas défini (division par un vecteur de \mathbb{R}^n).

2.3.2 Calcul différentiel

- f est différentiable en $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$(\star) \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1 dans } \mathbb{R}^m];$$

- f est différentiable en a , alors l'application linéaire L de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m vérifiant (\star) est unique;
- si f est différentiable en a , alors sa différentielle en a est l'application linéaire $df(a)$ définie par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} f(a) + \underbrace{df(a) \cdot (x - a)}_{L(x-a)} + o(\|x - a\|).$$

Exemple.

L'application

$$\text{Det} \left| \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A \end{array} \right.$$

est différentiable en I_n et

$$d\text{Det}(I_n) \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \text{Tr}(M) . \end{array} \right.$$

2.3.3 Théorème fondamental (Critère \mathcal{C}^1)Si la fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \end{array} \right.$$

continues sur Ω , pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, alors l'application f est différentiable sur Ω et, pour tout $a \in \Omega$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a]$$

où \mathcal{B}_n désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{B}_m la base canonique de \mathbb{R}^m .

2.3.4 Condition nécessaire pour être un extremum local

Si

- Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n ;
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur Ω ;
- f atteint un extremum local en un point $a \in \Omega$,

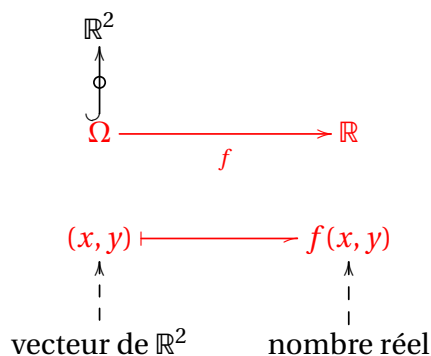
alors

$$df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}.$$

On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f .

2.4 Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

Considérons un cas particulier de la partie 2.3, en spécialisant à $n = 2$ et $m = 1$. Nous allons donc nous intéresser aux fonctions du type suivant.



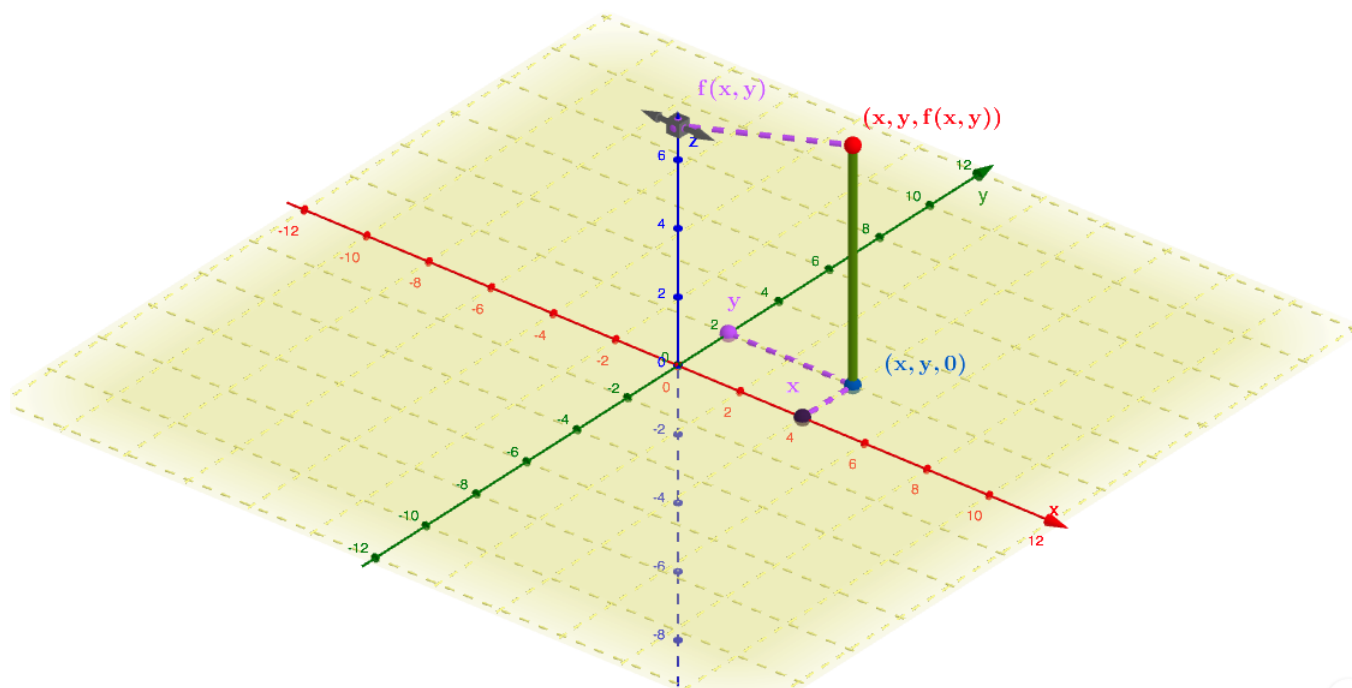
2.4.1 Le graphe de la fonction f

On appelle graphe de la fonction f la partie Γ de \mathbb{R}^3 définie par

$$\Gamma := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

i.e. Γ est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ obtenus en faisant varier $(x, y) \in \Omega$.

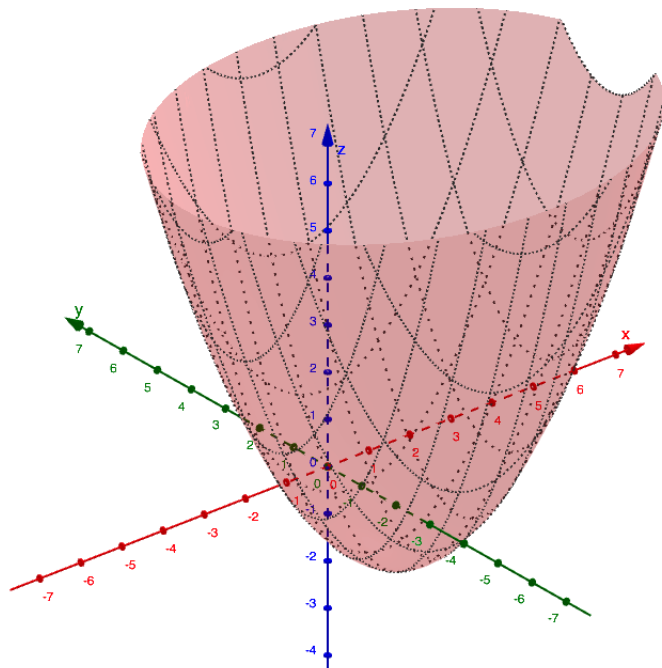
Un point du graphe Γ de f .



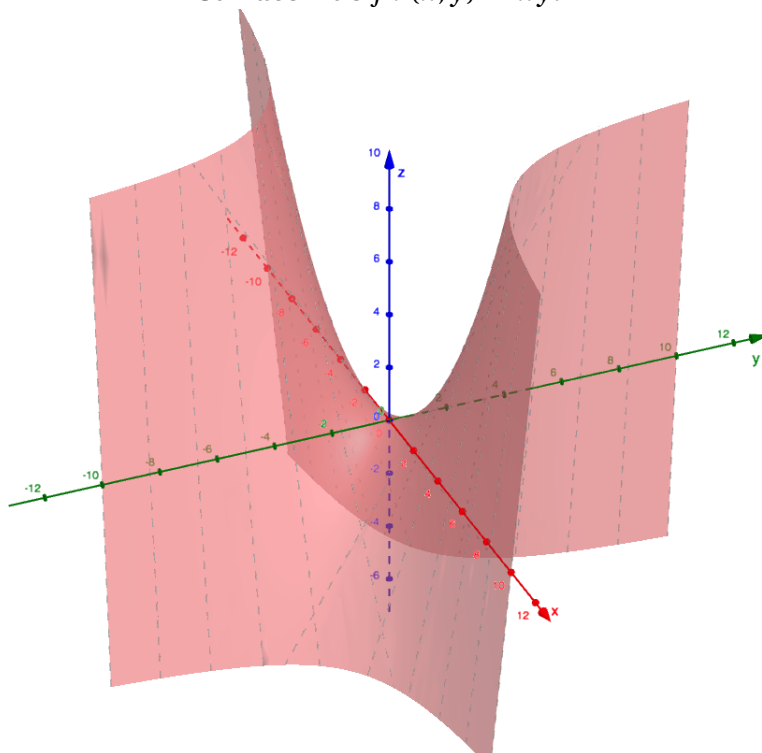
2.4.2 Si f est une continue son graphe est une surface (sens intuitif)

Si l'on suppose que la fonction f est continue sur Ω , alors son graphe Γ a l'allure d'une surface (sens intuitif), appelée parfois nappe.

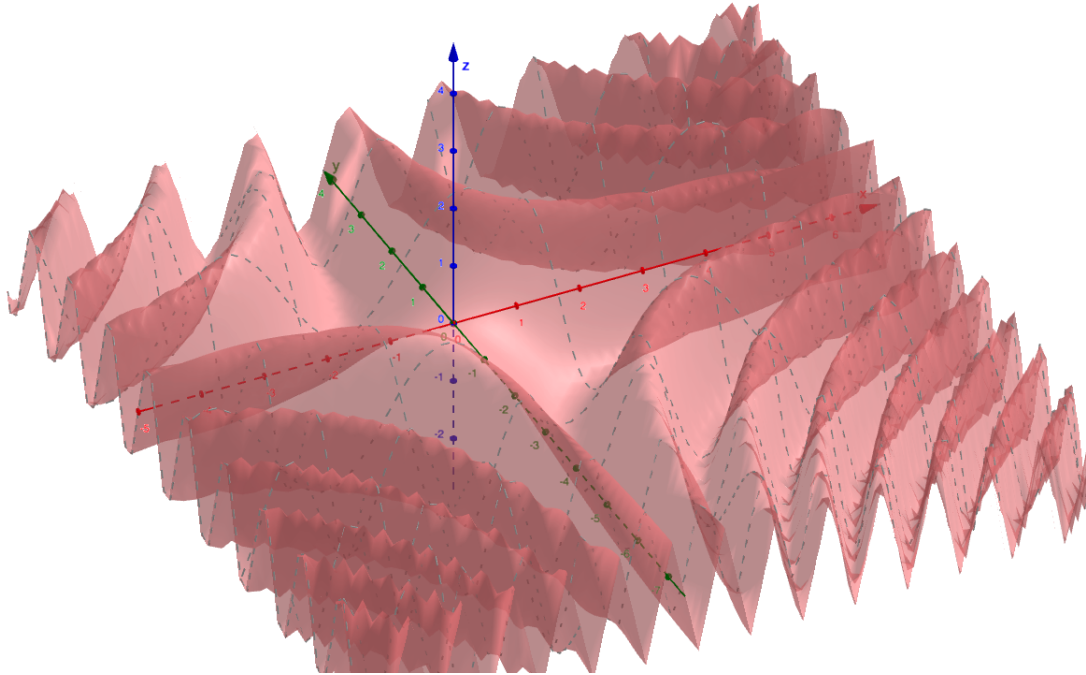
$$\text{Surface } \Gamma \text{ de } f: (x, y) \mapsto \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} - 2.$$



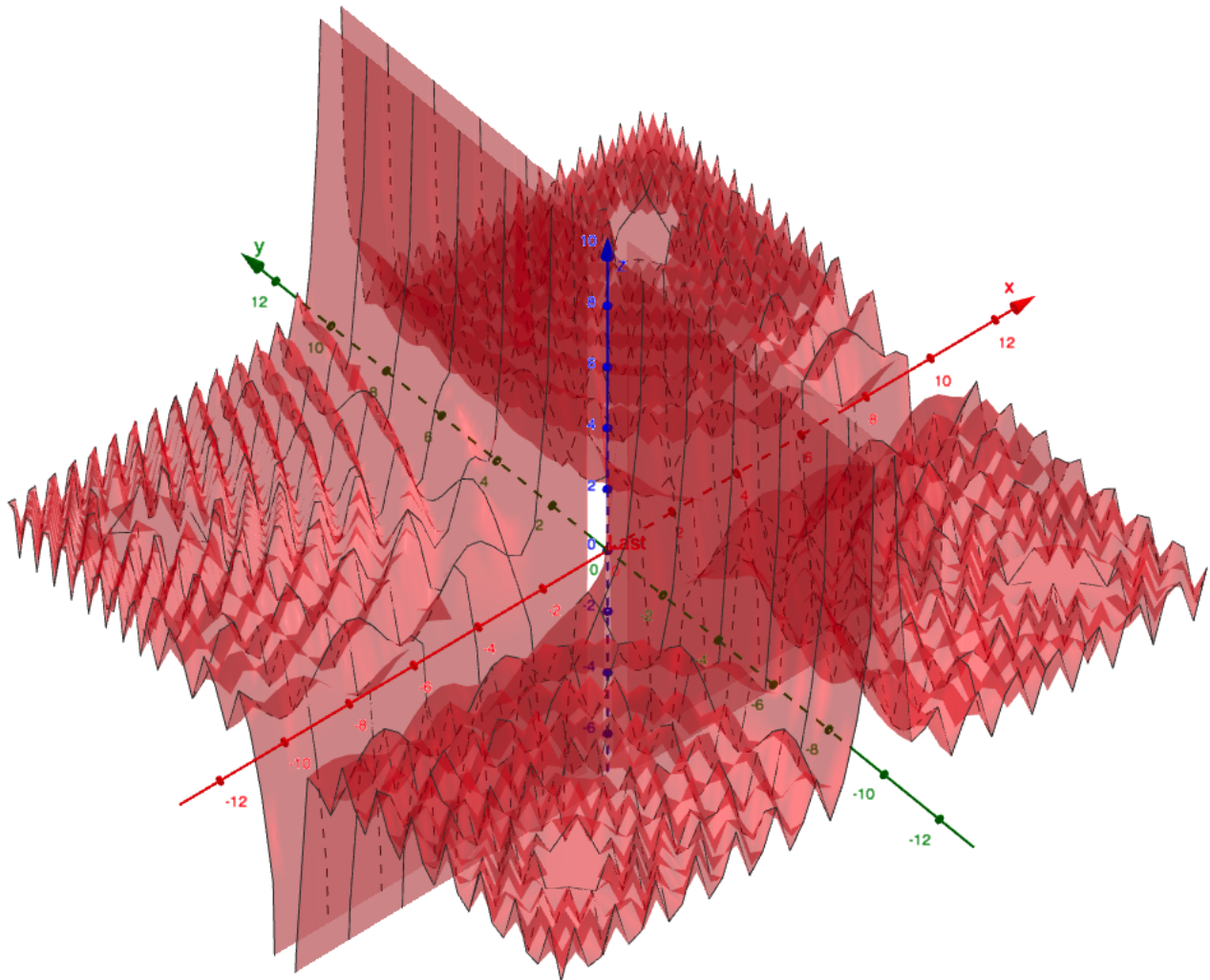
$$\text{Surface } \Gamma \text{ de } f: (x, y) \mapsto xy.$$



Surface Γ de $f: (x, y) \mapsto \sin(xy)$.



Surface Γ de $f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \sin(xy)$.



2.4.3 Exemple d'étude d'extrema d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Considérons de nouveau la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \\ (x, y) \mapsto \end{array} \right. f: (x, y) \mapsto \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} - 2$$

et étudions ses extrema.

Comme $f(x, y)$ est une expression polynomiale en les variables x et y , f admet des dérivées partielles en tout point (a, b) de \mathbb{R}^2 .

Après calcul, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}: (a, b) \mapsto \frac{2}{3}(a-1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: (a, b) \mapsto b+1.$$

Comme ces deux applications sont continues sur \mathbb{R}^2 , le critère \mathcal{C}^1 s'applique : la fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice de $df_{(a,b)}$ dans les bases canoniques est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \left(\frac{2}{3}(a-1) \quad b+1 \right).$$

D'après la condition nécessaire pour être un extremum local, f admet un extremum local en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$a-1 = b+1 = 0$$

i.e. si $(a, b) = (1, -1)$. Il est clair que $f(1, -1) = -2$ est un minimum global de f .

Conclusion. La fonction f possède un unique extremum local. Il s'agit d'un minimum global, valant -2 , atteint en l'unique point $(1, -1)$.

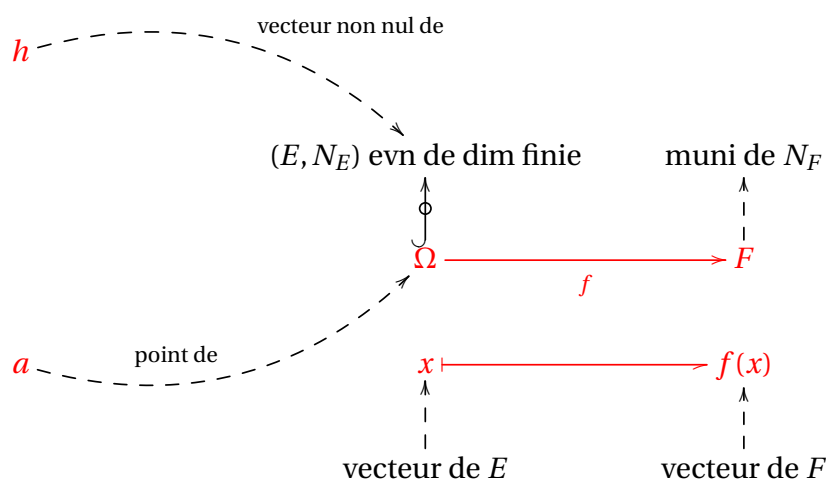
3 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

3.1 Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$

Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω ;
- h un vecteur non nul de E .

On a donc la situation suivante



LEMME 20.1 (Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$) — La fonction de la variable réelle t

$$\varphi_{a,h}: t \mapsto f(a + t.h)$$

est définie sur un ouvert de \mathbb{R} qui contient $0_{\mathbb{R}}$.

Démonstration —

- Introduisons la fonction $\tau_{a,h}$, la translation au point a suivant le vecteur h , définie par

$$\tau_{a,h} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow E \\ t \mapsto a + t.h \end{array} \right.$$

Cette application est $N_E(h)$ -lipschitzienne, donc continue sur \mathbb{R} . En effet, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$N_E(\tau_{a,h}(t_2) - \tau_{a,h}(t_1)) = N_E(a + t_2.h - (a + t_1.h))_E = N_E((t_2 - t_1).h) = N_E(h) |t_2 - t_1| .$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

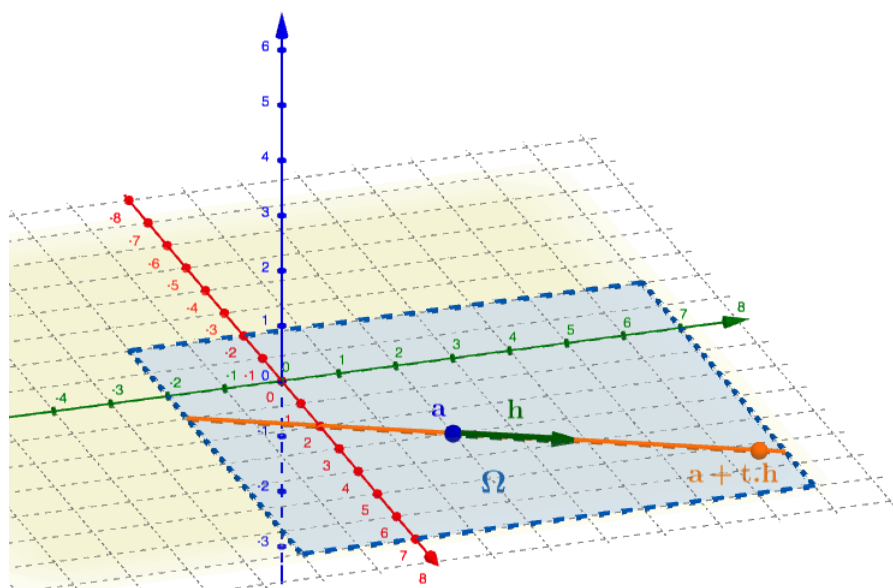
$$\begin{aligned} \varphi_{a,h} \text{ est définie en } t &\iff a + t.h \in \Omega \\ &\iff \tau_{a,h}(t) \in \Omega \\ &\iff t \in \tau_{a,h}^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$ est $\tau_{a,h}^{-1}(\Omega)$, qui est un ouvert de \mathbb{R} , comme image réciproque de l'ouvert Ω de E par l'application continue $\tau_{a,h}$.

- De plus, il est clair que $\varphi_{a,h}$ est définie en $0_{\mathbb{R}}$, puisque $a + 0_{\mathbb{R}} \cdot h = a \in \Omega$.

Q.E.D.

Illustration du domaine de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$.



3.2 Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle

DÉFINITION 20.2 (Dérivée selon un vecteur) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω ;
- h un vecteur non nul de E .

Soit la fonction $\varphi_{a,h}$ de la variable t réelle

$$\varphi_{a,h}: t \mapsto f(a + t.h)$$

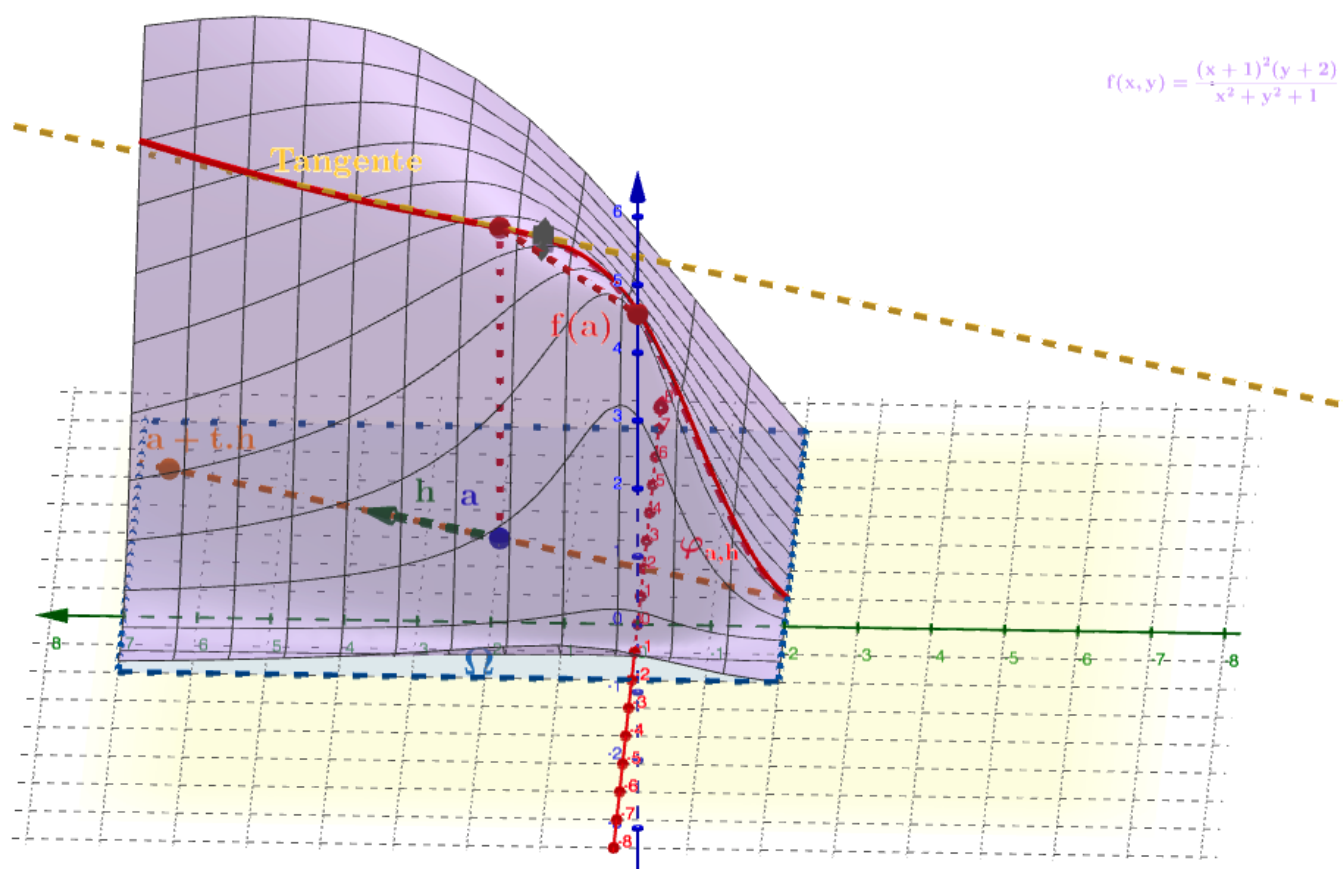
qui est définie sur un ouvert de \mathbb{R} contenant $0_{\mathbb{R}}$.

1. On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur h si la fonction $\varphi_{a,h}$ est dérivable en 0 .
2. Si f est dérivable en a suivant le vecteur h , alors on pose

$$D_h f(a) := \varphi'_{a,h}(0) = \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a + t.h) - f(a)}{t} \in F$$

Ce vecteur de F est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h .

Illustration d'une dérivée en un point suivant un vecteur non nul.



EXEMPLE 20.3 — L'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admet une dérivée selon tout vecteur non nul de \mathbb{R}^2 au point en $(0, 0)$.

Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\frac{f((0, 0) + t(h_1, h_2)) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3 h_1^3 - t^4 h_2^4}{t^2 h_1^2 + t^2 h_2^2} = \frac{h_1^3 - t h_2^4}{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Donc la fonction f est dérivable en $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ au point $(0, 0)$ et

$$D_h f(0, 0) = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}.$$

3.3 Dérivées partielles

DÉFINITION 20.4 (Dérivées partielles - cas général) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$;
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- a un point de Ω ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs e_1, \dots, e_n de la base \mathcal{B} de E .

Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la i -ème dérivée partielle de f en a , notée $\partial_i f(a)$, par

$$\partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F.$$

DÉFINITION 20.5 (Dérivées partielles - cas où la source est un ouvert de \mathbb{R}^n) — Soient

- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de \mathbb{R}^n ;
- a un point de Ω ;
- $f: \Omega \rightarrow F$; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs e_1, \dots, e_n de la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n .

Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la i -ème dérivée partielle de f en a , notée $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F.$$

EXEMPLE 20.6 — L'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^2. \end{array} \right.$$

possède des dérivées partielles dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle de f en a .**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{a, e_1}(t) := f(a + te_1) = f(a_1 + t, a_2) = (a_1 + t)^3 + (a_1 + t)a_2 + a_2^2.$$

Comme cette expression est polynomiale en t , elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{df(a + te_1)}{dt} = 3(a_1 + t)^2 + a_2.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \partial_1 f(a) = \left. \frac{df(a + te_1)}{dt} \right|_{t=0} = 3a_1^2 + a_2.$$

Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x, y)$ par rapport à x , en supposant y constant, avant d'évaluer le résultat en $(x, y) = (a_1, a_2)$.

- **Deuxième dérivée partielle de f en a .**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{a, e_2}(t) := f(a + te_2) = f(a_1, a_2 + t) = a_1^3 + a_1(a_2 + t) + (a_2 + t)^2.$$

Comme cette expression est polynomiale en t , elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{df(a + te_2)}{dt} = a_1 + 2(a_2 + t).$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) := \partial_2 f(a) = \left. \frac{df(a + te_2)}{dt} \right|_{t=0} = a_1 + 2a_2.$$

Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x, y)$ par rapport à y , en supposant x constant, avant d'évaluer le résultat en $(x, y) = (a_1, a_2)$.

REMARQUE 20.7 (Calcul pratique des dérivées partielles) — En pratique, lorsque l'on dispose d'une expression de f définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n , la i -ème dérivée partielle se calcule en dérivant l'expression par rapport à la i -ème variable, les autres variables étant considérées comme des constantes, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4 Différentiabilité et différentielle en un point

4.1 Notation de Landau

Soient

- (E, N_E) un espace vectoriel normé de dimension finie;
- (F, N_F) un espace vectoriel normé de dimension finie;
- $\mathcal{V}_{0_E}^*$ un voisinage de 0_E , privé de 0_E (on parle de voisinage épointé);
- une application $f: \mathcal{V}_{0_E}^* \rightarrow F$.

On écrit

$$f(h) = \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h))$$

si

$$\frac{f(h)}{N_E(h)} \underset{h \rightarrow 0_E}{\xrightarrow{F}} 0_F$$

ou de manière équivalente si

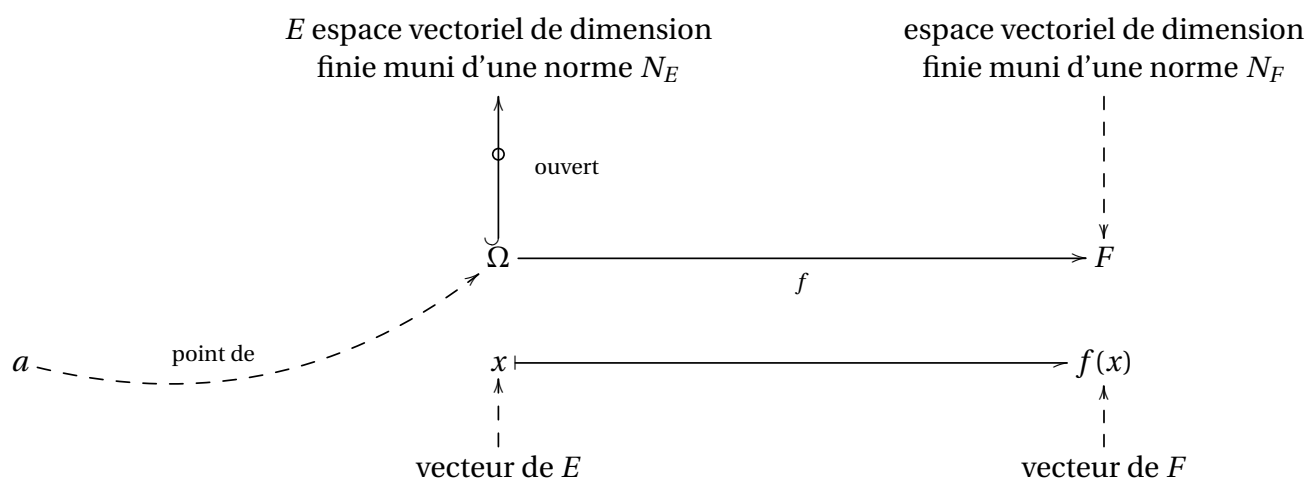
$$\frac{N_F(f(h))}{N_E(h)} = N_F \left(\frac{f(h)}{N_E(h)} \right) \underset{h \rightarrow 0_E}{\xrightarrow{\mathbb{R}}} 0_{\mathbb{R}}.$$

Idée intuitive. $f(h) = \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h))$ signifie que

la quantité vectorielle $f(h)$ dans F , divisée par $N_E(h)$, tend vers 0_F , lorsque h tend vers 0_E .

4.2 Présentation du contexte général

Dans cette partie 4, nous considérerons souvent la situation suivante.



4.3 Application différentiable en un point

DÉFINITION 20.8 (Application différentiable en un point) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω .

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(N_E(h))$$

i.e. telle que

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{N_E(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$$

REMARQUE 20.9 (L'application $h \mapsto f(a+h)$ est définie sur un voisinage de 0_E) — Comme Ω est un ouvert de E et comme $a \in \Omega$, il existe $r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. On en déduit que le vecteur $f(a+h)$ de F est bien défini, pour tout $h \in \mathcal{B}_E(0_E, r_a)$, donc sur un voisinage de 0_E .

REMARQUE 20.10 (Interprétation de l'application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$) — L'application $L \in \mathcal{L}(E, F)$ peut être vue comme l'application linéaire de E dans F qui approxime au mieux l'application

$$h \mapsto f(a+h) - f(a)$$

au voisinage de 0_E .

EXEMPLE 20.11 (Différentiabilité en tout point de l'élevation au carré dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) — Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |[M]_{i,j}| \right).$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^2. \end{array} \right.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.

- Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(A+H) = (A+H)^2 = (A+H)(A+H) = \underbrace{A^2}_{f(A)} + \underbrace{AH+HA}_{\text{linéaire en } H} + H^2.$$

- L'application

$$L \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H \mapsto AH+HA \end{array} \right.$$

est linéaire.

- Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$

$$0 \leq \|H^2\| \leq \|H\|^2$$

et donc

$$0 \leq \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq \|H\| .$$

Par Théorème d'encadrement

$$\frac{H^2}{\|H\|} \xrightarrow{H \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Donc

$$H^2 = \underset{H \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o} (\|H\|) .$$

- De ce qui précède on déduit que l'application f est différentiable en a , avec

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + \underset{H \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o} (\|H\|)$$

où L est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $AH + HA$.

4.4 La différentiabilité en a entraîne la continuité en a

PROPOSITION 20.12 (La différentiabilité en a entraîne la continuité en a) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω .

Si l'application f est différentiable en a , alors elle est continue en a .

Démonstration — Supposons f différentiable en a . Alors il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) .$$

L'application L est linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue et ainsi

$$L(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} L(0_E) = 0_F .$$

On observe

$$\underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) = \underbrace{N_E(h)}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0_E} 0_{\mathbb{R}}} \cdot \underbrace{\frac{\underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h))}{N_E(h)}}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0_E} 0_F} \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F .$$

Ainsi

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} f(a) + 0_F + 0_F = f(a) .$$

Q.E.D.

REMARQUE 20.13 (Une application continue en a n'est pas nécessairement différentiable en a) — L'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue en 0, mais n'est pas différentiable en 0.

Démontrons le par l'absurde en supposant que f est différentiable en 0, i.e. en supposant qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$|h| = f(h) = f(0) + L(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|) = L(h) + o_{h \rightarrow 0}(|h|) = hL(1) + o_{h \rightarrow 0}(|h|).$$

Si $h \in \mathbb{R}^*$, on obtient, en divisant chaque membre par $|h|$

$$1 = \frac{h}{|h|} L(1) + o_{h \rightarrow 0}(1).$$

Quand $h \rightarrow 0^+$, il vient $L(1) = 1$ et, quand $h \rightarrow 0^-$, il vient $-L(1) = 1$. Contradiction.

4.5 Une application différentiable en a admet des dérivées dans toutes les directions en a

PROPOSITION 20.14 (Une application différentiable en a admet des dérivées directionnelles en a) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω ;
- v un vecteur non nul de E .

Supposons l'application f différentiable au point a , i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(N_E(h)).$$

Alors l'application f admet une dérivée en a , suivant la direction v , et

$$D_v f(a) = L(v).$$

Démonstration —

- L'application

$$\varepsilon: h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{N_E(h)}$$

est définie sur un voisinage $\mathcal{V}_{0_E}^*$ ouvert de 0_E , privé de 0_E (on parle de voisinage époiné de 0_E), et vérifie

$$- f(a+h) = f(a) + L(h) + N_E(h) \varepsilon(h) \text{ pour tout } h \in \mathcal{V}_{0_E}^* ;$$

$$- \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F, \text{ i.e. } N_F(\varepsilon(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_{\mathbb{R}}.$$

- On considère pour un $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $t.v \in \mathcal{V}_{0_E}^*$.

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{f(a) + L(t.v) + N_E(t.v)\varepsilon(t.v) - f(a)}{t} = \frac{tL(v) + N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t} = L(v) + \frac{N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t}.$$

- Le résultat de la proposition 20.14 découle de la propriété

$$\frac{N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} 0_F$$

qui équivaut à

$$N_F\left(\frac{N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} 0_{\mathbb{R}}.$$

Nous démontrons ci-dessous.

- Nous observons

$$(\star) \quad 0 \leq N_F\left(\frac{N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t}\right) = \frac{1}{|t|} N_F(|t| N_E(v)\varepsilon(t.v)) = N_E(v) N_F(\varepsilon(t.v))$$

Comme $t.v \rightarrow 0_E$ quand $t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}$ et $N_F(\varepsilon(h)) \rightarrow 0_{\mathbb{R}}$ quand $h \rightarrow 0_E$, on obtient par composition de limites

$$(\star\star) \quad N_F(\varepsilon(t.v)) \xrightarrow{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} 0_{\mathbb{R}}.$$

De (\star) , $(\star\star)$ et du Théorème d'encadrement, nous déduisons $N_F\left(\frac{N_E(t.v)\varepsilon(t.v)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} 0_{\mathbb{R}}$.

REMARQUE 20.15 (Admettre des dérivées directionnelles en a n'entraîne pas la différentiabilité en a) — Soit l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La fonction f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$, dans toutes les directions, mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Démontrons le.

- Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Donc au moins l'un des nombres v_1, v_2 est non nul. Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{f((0, 0) + t(v_1, v_2)) - f(0, 0)}{t} &= \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \frac{t^5 v_1^5}{(tv_2 - t^2 v_1^2)^2 + t^4 v_1^4} \\ &= \frac{t^4 v_1^5}{t^2 v_2^2 - 2t^3 v_1^2 v_2 + 2t^4 v_1^4} \\ &= \frac{t^2 v_1^5}{v_2^2 - 2t v_1^2 v_2 + 2t^2 v_1^4} \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

- **Cas où $v_2 \neq 0$.**

Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\frac{f((0,0) + t(v_1, v_2)) - f(0,0)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2 v_1^5}{v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0;$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (v_1, v_2)$ et

$$D_v f(0,0) = 0.$$

- **Cas où $v_2 = 0$.**

Supposons $v_2 = 0$. Alors comme $v \neq (0,0)$, $v_1 \neq 0$.

$$\frac{f((0,0) + t(v_1, v_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2 v_1^5}{2t^2 v_1^4} = \frac{v_1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{v_1}{2};$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (v_1, v_2)$ et

$$D_v f(0,0) = \frac{v_1}{2}.$$

- L'application admet donc des dérivées en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et

$$(\star) \quad D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 \neq 0 \\ \frac{v_1}{2} & \text{si } v_2 = 0. \end{cases}$$

• Démontrons que f n'est pas différentiable en $(0,0)$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$f((0,0) + (h_1, h_2)) = f(0,0) + L(h_1, h_2) + \underset{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}{o} \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right).$$

D'après la Proposition 20.14

$$(\star\star) \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad D_{(v_1, v_2)} f(0,0) = L(v_1, v_2).$$

Calculons de deux manières $D_{(1,1)} f(0,0)$. D'après (\star)

$$D_{(1,1)} f(0,0) = 0.$$

D'après (\star) et $(\star\star)$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = L(1,1) = L((1,0) + (0,1)) = L(1,0) + L(0,1) = D_{(1,0)} f(0,0) + D_{(0,1)} f(0,0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi une contradiction.

4.6 Différentielle en a d'une application différentiable en a

PROPOSITION-DÉFINITION 20.16 (Différentielle en a d'une application différentiable en a) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application;
- a un point de Ω ;

Supposons l'application f différentiable au point a , i.e. qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$(\star) \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) .$$

1. L'application linéaire L vérifiant (\star) est unique.
2. L'application linéaire L est appelée différentielle de f en a et est notée $df(a)$.
3. La différentielle de f en a est l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$(\star) \quad \boxed{f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) .}$$

Démonstration — Seul l'unicité d'une application linéaire L de E dans F vérifiant (\star) mérite une explication. Supposons qu'il existe deux applications linéaires $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que

$$f(a+h) = f(a) + L_1(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) \quad \text{et} \quad f(a+h) = f(a) + L_2(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o} (N_E(h)) .$$

Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. D'après la Proposition 20.14

$$L_1(v) = D_v f(a) = L_2(v) .$$

De plus, comme $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, F)$

$$L_1(0_E) = 0_F = L_2(0_E) .$$

Donc les applications L_1 et L_2 sont égales. **Q.E.D.**

REMARQUE 20.17 (Expression des dérivées directionnelles en termes de différentielles) — On conserve les notations de la Proposition-Définition 20.16 et on considère un vecteur $v \in E \setminus \{0_E\}$. D'après la proposition 20.14

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v .$$

EXEMPLE 20.18 (Suite de l'exemple 20.11) — Les résultats établis pour la fonction

$$f \quad \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^2 \end{array} \right.$$

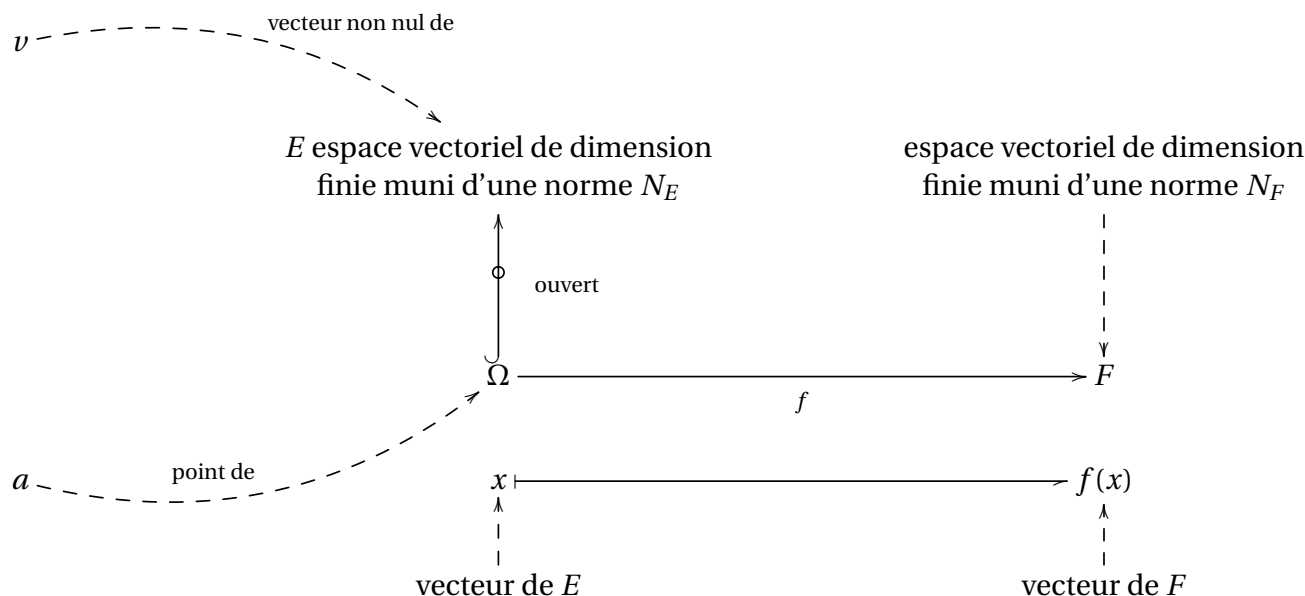
dans l'exemple 20.11 s'interprètent comme suit.

L'application f est différentiable en tout point $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la différentielle de f en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$df(A) \quad \left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto AH + HA . \end{array} \right.$$

4.7 Synthèse sur la continuité, les dérivées directionnelles et la différentiabilité

On considère la situation suivante.



Continuité de f en a .

La fonction f est continue en a si

$$f(a+h) \xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{F} f(a).$$

Dérivabilité et dérivée de f en a suivant v .

- La fonction f est dérivable en a suivant v s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\frac{f(a+t.v) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}]{F} \ell.$$

- Si f est dérivable en a suivant v , la dérivée de f en a suivant v est

$$D_v f(a) := \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+t.v) - f(a)}{t} \in F.$$

Dérivabilité partielle et dérivées partielles de f en a dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On dit que f admet une i -ème dérivée partielle en a si la fonction f est dérivable en a suivant e_i , i.e. s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\frac{f(a+t.e_i) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}]{F} \ell.$$

- Si f admet une i -ème dérivée partielle en a , la i -ème dérivée partielle de f en a est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a) := \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+t.e_i) - f(a)}{t} \in F.$$

Différentiabilité et différentielle de f en a .

- La fonction f est différentiable en a s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(N_E(h))$.
- Si f est différentiable en a , l'application L de E dans F dans le DL1 de f en a est unique. On l'appelle différentielle de f en a et on la note $df(a)$. On a donc

$$df(a) \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad \underbrace{f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(N_E(h))}_{\text{DL1 de } f \text{ en } a}$$

Différentiabilité de f en a versus continuité de f en a .

$$\boxed{f \text{ différentiable en } a} \implies \boxed{f \text{ continue en } a}$$

$$\boxed{f \text{ continue en } a} \not\implies \boxed{f \text{ différentiable en } a}$$

Un exemple d'application continue en un point (0) mais qui n'est pas différentiable en ce point est donné par l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Différentiabilité de f en a versus dérivées directionnelles en a suivant tout vecteur

$$\boxed{f \text{ différentiable en } a} \implies \boxed{\begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } a \text{ suivant tout vecteur } v \in E \setminus \{0_E\} \\ \text{et} \\ D_v f(a) = df(a) \cdot v \end{array}}$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ suivant tout vecteur } v \in E \setminus \{0_E\}} \not\implies \boxed{f \text{ différentiable en } a}$$

Un exemple d'application qui admet des dérivées dans toutes les directions en un point $((0,0))$ mais qui n'est pas différentiable en ce point est donné par l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ses dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont données par

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 \neq 0 \\ \frac{v_1}{2} & \text{si } v_2 = 0. \end{cases}$$

5 Deux exemples élémentaires d'applications différentiables

5.1 Différentiabilité et différentielle d'une application constante

PROPOSITION 20.19 (Différentiabilité et différentielle d'une application constante) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: \Omega \rightarrow F$ une application constante;
- a un point de Ω ;

Alors l'application f est différentiable en a et

$$df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathcal{B}_E(0_E, r_a)$

$$f(a+h) = f(a) = f(a) + \underbrace{0_{\mathcal{L}(E,F)}(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{0_F}_{\underset{h \rightarrow 0_E}{\mathcal{O}}(N_E(h))}$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a , l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Q.E.D.

5.2 Différentiabilité et différentielle d'une restriction d'application linéaire

PROPOSITION 20.20 (Différentiabilité et différentielle d'une restriction d'application linéaire) — Soient

- E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);
- F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f: E \rightarrow F$ une application linéaire dont la restriction à Ω est notée $f|_{\Omega}$;
- a un point de Ω ;

Alors l'application $f|_{\Omega}$ est différentiable en a et

$$df|_{\Omega}(a) = f.$$

Démonstration — Soit $r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Alors pour tout $h \in \mathcal{B}_E(0_E, r_a)$

$$f|_{\Omega}(a+h) = f(a+h) = f(a) + f(h) = f|_{\Omega}(a) + \underbrace{f(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{0_F}_{o_{h \rightarrow 0_E}(N_E(h))}$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a , l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$df(a) = f.$$

Q.E.D.

6 Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

6.1 Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m

PROPOSITION 20.21 (Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m) — Soient

- $m \geq 1$ un nombre entier;
- Ω une partie ouverte de \mathbb{R} ;
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction;
- a un point de Ω ;

1. La fonction f est différentiable en a si et seulement si la fonction f est dérivable en a .
2. Si la fonction f est différentiable en a , alors

- la différentielle de f en a : $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$;
- la dérivée de f en a : $f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^m$

s'expriment mutuellement l'une en fonction de l'autre comme suit

$$\forall h \in \mathbb{R}, df(a) \cdot h = h \cdot f'(a) \quad \text{et} \quad f'(a) = df(a) \cdot 1.$$

Démonstration —

- Supposons l'application f différentiable en a . Il existe $r_a > 0$ tel que $]a - r_a, a + r_a[\subset \Omega$ et pour tout $h \in]-r_a, r_a[$

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}{o}(|h|) = f(a) + h \cdot df(a) \cdot 1 + \underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}{o}(|h|)$$

Ainsi

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = df(a) \cdot 1 + \underbrace{\frac{\underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}{o}(|h|)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} 0_{\mathbb{R}^m}}$$

et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} df(a) \cdot 1.$$

La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

- Supposons l'application f dérivable en a . Alors f admet un DL1 en a au sens des fonctions de la variable réelle

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h \cdot f'(a)}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}{o}(|h|)$$

d'après la Proposition 17.6 du chapitre 17 « Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ».

Comme nous avons obtenu un DL1 de f en a , l'application f est différentiable en a et de plus la différentielle de f en a est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.

$$df(a) \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ h \mapsto h \cdot f'(a) \end{array} \right.$$

Q.E.D.

EXEMPLE 20.22 — On considère la fonction inverse

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

et un point a de \mathbb{R}^* . La fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$. D'après la Proposition 20.21, l'application f est différentiable en a et sa différentielle est donnée par

$$df(a) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto -\frac{h}{a^2} \end{array} \right.$$

6.2 Différentielle d'une fonction différentiable définie sur ouvert de \mathbb{R}^n via ses dérivées partielles

PROPOSITION 20.23 (Expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles)
— Soient

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ des nombres entiers;
- $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n ;
- Ω une partie ouverte de \mathbb{R}^n ;
- a un point de Ω ;
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application supposée différentiable en a .

1. Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) := D_{e_1} f(a) \in \mathbb{R}^m, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) := D_{e_n} f(a) \in \mathbb{R}^m$$

existent toutes.

2. Pour tout $h = \sum_{i=1}^n h_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^n$, où $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^m.$$

La connaissance des dérivées partielles de f en a suffit donc à connaître la différentielle de f en a .

Démonstration —

1. L'assertion est conséquence de la Proposition 20.14.

2. Soit $h = \sum_{i=1}^n h_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^n$, où $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} df(a) \cdot h &= df(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^n h_i \cdot e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \cdot df(a) \cdot e_i \quad [\text{linéarité de } df(a)] \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \cdot D_{e_i} f(a) \quad [\text{Proposition 20.14.}] \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Q.E.D.

6.3 Matrice Jacobienne

PROPOSITION 20.24 (Matrice Jacobienne) — Soient

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ des nombres entiers;
- $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n ;
- $\mathcal{B}_m = (e'_1, \dots, e'_m)$ la base canonique de \mathbb{R}^m ;
- Ω une partie ouverte de \mathbb{R}^n ;
- a un point de Ω ;
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ une application supposée différentiable en a .

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la i -ème application coordonnée de f

$$f_i \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

est différentiable en a .

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la i -ème application coordonnée de f

$$f_i \left| \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

admet des dérivées en a dans toutes les directions, en particulier ses dérivées partielles en a existent.

3. La matrice de l'application $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans les bases \mathcal{B}_n et \mathcal{B}_m est donnée par

$$Mat_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a]$$

Démonstration —

- On munit \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m des normes N_n et N_m définies par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_n(x_1, \dots, x_n) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{et} \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad N_m(x_1, \dots, x_m) := \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|.$$

- Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $df(a) \cdot h \in \mathbb{R}^m$ se décompose d'une unique manière dans la base \mathcal{B}_m . Il existe un unique m -uplet de réels $(L_1(h), \dots, L_m(h))$ tels que

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^m L_i(h) \cdot e'_i.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on définit l'application L_i par

$$L_i \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto L_i(h) \end{array} \right.$$

i.e. l'application L_i associe à un vecteur h de \mathbb{R}^n la i -ème coordonnée du vecteur $df(a) \cdot h$ de \mathbb{R}^m dans la base \mathcal{B}_m .

- Démontrons que les applications L_1, \dots, L_m sont linéaires. Soient $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m L_i(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \cdot e'_i &= df(a) \cdot (\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \quad [\text{par définition des applications } L_1, \dots, L_m] \\ &= \lambda_1 df(a) \cdot h_1 + \lambda_2 df(a) \cdot h_2 \quad [df(a) \text{ est linéaire}] \\ &= \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^m L_i(h_1) \cdot e'_i + \lambda_2 \cdot \sum_{i=1}^m L_i(h_2) \cdot e'_i \quad [\text{par définition des applications } L_1, \dots, L_m] \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_1 \cdot L_i(h_1) + \lambda_2 \cdot L_i(h_2)) \cdot e'_i \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur de \mathbb{R}^m dans la base \mathcal{B}_m , il vient

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad L_i(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) = \lambda_1 \cdot L_i(h_1) + \lambda_2 \cdot L_i(h_2).$$

- Soit $r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(a, r_a) \subset \Omega$. Comme f est différentiable en a , pour tout $h \in \mathcal{B}_E(0_E, r_a)$

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \underset{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathbf{o}}(N_n(h))$$

i.e.

$$(\star) \quad N_m \left(\frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{N_n(h)} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} 0_{\mathbb{R}}.$$

Comme

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (f_1(a+h), \dots, f_m(a+h)) = \sum_{i=1}^m f_i(a+h) \cdot e'_i \\ f(a) &= (f_1(a), \dots, f_m(a)) = \sum_{i=1}^m f_i(a) \cdot e'_i \\ df(a) \cdot h &= \sum_{i=1}^m L_i(h) \cdot e'_i \end{aligned}$$

on a

$$\frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{N_n(h)} = \sum_{i=1}^m \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{N_n(h)} \cdot e'_i$$

et donc

$$N_m \left(\frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{N_n(h)} \right) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{N_n(h)} \right|.$$

- Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. De

$$0 \leq \left| \frac{f_k(a+h) - f_k(a) - L_k(h)}{N_n(h)} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{N_n(h)} \right| = N_m \left(\frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{N_n(h)} \right)$$

(★) et du Théorème d'encadrement, on déduit

$$\frac{f_k(a+h) - f_k(a) - L_k(h)}{N_n(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} 0_{\mathbb{R}}$$

i.e.

$$f_k(a+h) = f_k(a) + \underbrace{L_k(h)}_{\text{linéaire en } h} + o_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}}(N_n(h)).$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f_k en a , l'application f_k est différentiable en a et de plus la différentielle de f_k en a est l'application linéaire L_k , i.e.

$$df_k(a) = L_k.$$

- D'après ce qui précède, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$(\star\star) \quad df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^m L_i(h) \cdot e'_i = \sum_{i=1}^m (df_i(a) \cdot h) \cdot e'_i$$

- La première assertion est démontrée. La seconde résulte de la Proposition 20.14. Reste à calculer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a))$. Il s'agit donc de calculer, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les coordonnées du vecteur $df(a) \cdot e_j$ dans la base \mathcal{B}_m de \mathbb{R}^m , celles-ci formant la j -ième colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a))$.
- Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} df(a) \cdot e_j &= \sum_{i=1}^m (df_i(a) \cdot e_j) \cdot e'_i \quad [\text{d'après } (\star\star)] \\ &= \sum_{i=1}^m D_{e_j} f_i(a) \cdot e'_i \quad [\text{Proposition 20.14}] \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot e'_i \quad [\text{Définition des dérivées partielles}] \end{aligned}$$

Donc la j -ième colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a))$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}.$$

Q.E.D.