Chapitre 20
Calcul différentiel

Table des matières

1 Extrait du programme relatif à ce chapitre

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$ est autorisée.

Différentielle

Application différentiable au point a. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	Notation $\mathrm{d}f$.

Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u,v), on ait $\\|B(u,v)\\| \leqslant C\\|u\\|\\,\\|v\\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.

Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$.

Cas des applications numériques

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x,y)$: équation cartésienne.

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

Le théorème des fonctions implicites est hors programme. PC : électrostatique.

Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.

Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.

Démonstration pour Ω convexe.

Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k.

Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_l} \dots \partial_{j_1} f$.

Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.

La notion de différentielle seconde est hors programme. PC : laplacien.

Théorème de Schwarz.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.

Démonstrations non exigibles.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

2 Introduction

2.1 Fonctions étudiées en MPSI

Les fonctions étudiées en MPSI étaient de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\
I \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{K} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \\
\text{nombre réel} \arrow[u, dashed] & \text{nombre réel ou complexe} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

2.1.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{\mathbb{K}} \ell$;
- si f est dérivable en a, alors son nombre dérivé en a est défini par

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad [\text{nombre dans } \mathbb{K}]\,.}$$

2.1.2 Condition nécessaire pour être un extremum local

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I ;
- f admet un extremum local en un point a de I

alors $f'(a) = 0$. On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f.

Remarque. Le fait que I soit ouvert est essentiel. En effet, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[0,1]$ et admet un extremum local (et même global) en 0 et en 1. Mais en ces deux points, la dérivée égale 2.

2.1.3 Un lien avec le calcul intégral

Si

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,.$$

2.2 Fonctions étudiées en MP jusque là

Les fonctions étudiées dans le chapitre 17 « Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie » sont de la forme suivante

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \text{ou } E \text{ un evn de dim finie} \arrow[d, dashed] \\
I \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^m \\
x \arrow[r, mapsto] & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\
\text{nombre réel} \arrow[u, dashed] & \text{vecteur de } \mathbb{R}^m \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

où $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$

$$f_i \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{array} \right.$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i-ième coordonnée), donc du type de celles étudiées en MPSI.

2.2.1 Calcul différentiel

- f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{\mathbb{R}^m} \ell \text{ ce qui équivaut à, pour tout } i \in [\![1, m]\!], \ \frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{\mathbb{R}} \ell_i \, ;$$

- si f est dérivable en a, alors son vecteur dérivé en a est défini par

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (f_1'(a), \dots, f_m'(a)) \quad [\text{vecteur de } \mathbb{R}^m] \, .}$$

2.2.2 Un lien avec le calcul intégral

Si

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors d'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a) \quad [\text{égalité entre vecteurs de } \mathbb{R}^m]$$

i.e.

$$\left(\int_a^b f_1'(x) \, \mathrm{d}x \, , \, \dots \, , \int_a^b f_m'(x) \, \mathrm{d}x \right) = (f_1(b) - f_1(a), \dots, f_m(b) - f_m(a)) \, .$$

2.2.3 Inégalité des accroissements finis

Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, si

- f est dérivable sur I avec une dérivée f' bornée sur I ;
- a et b sont deux points de I

alors $\|f(b)-f(a)\| \leq \left(\sup\limits_{x\in I}\|f'(x)\|\right)|b-a|$.

2.3 Fonctions étudiées en MP dans ce chapitre

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont de la forme suivante.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \text{ou } E \text{ un evn de dim finie} & & \text{ou } F \text{ un evn de dim finie} \arrow[d, dashed] \\
\Omega \arrow[u, hook] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{R}^m \\
(x_1,\dots,x_n) \arrow[rr, mapsto] & & (f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) \\
\text{vecteur de } \mathbb{R}^n \arrow[u, dashed] & & \text{vecteur de } \mathbb{R}^m \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$

$$
f_i \left| \begin{array}{ccc} \underset{\Omega}{\overset{\mathbb{R}^n}{\cup}} & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & f_i(x_1,\dots,x_n) \end{array} \right.
$$

est une fonction à valeurs réelles (fonction i-ième coordonnée), jamais encore étudiée.

2.3.1 Taux d'accroissement non défini

> si $a,x\in\Omega$, alors l'objet $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'est pas défini (division par un vecteur de $\mathbb{R}^n$).

2.3.2 Calcul différentiel

- f est différentiable en $a\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ s'il existe $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ telle que

$$(\star)\qquad f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|) \qquad [\text{développement limité à l'ordre 1 dans } \mathbb{R}^m] \ ;$$

- f est différentiable en a, alors l'application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant $(\star)$ est unique ;
- si f est différentiable en a, alors sa différentielle en a est l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ définie par

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\underbrace{\mathrm{d}f(a)\cdot(x-a)}_{L(x-a)}+o(\|x-a\|)\,.}$$

Exemple.
L'application

$$\mathrm{Det}\;\left|\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det A \end{array}\right.$$

est différentiable en I_n et

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Det}(I_n)\;\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(M)\ . \end{array}\right.$$

2.3.3 Théorème fondamental (Critère $\mathscr{C}^1$)

Si la fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\;\left|\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \end{array}\right.$$

continues sur Ω, pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$, alors l'application f est différentiable sur Ω et, pour tout $a \in \Omega$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}(\,\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad \big[\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a\big]$$

où $\mathscr{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

2.3.4 Condition nécessaire pour être un extremum local

Si

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur Ω ;
- f atteint un extremum local en un point $a \in \Omega$,

alors

$$\mathrm{d}f_a = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\ .$$

On dispose ainsi un outil pour étudier les extrema locaux de f.

2.4 Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

Considérons un cas particulier de la partie 2.3, en spécialisant à $n = 2$ et $m = 1$. Nous allons donc nous intéresser aux fonctions du type suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 & \\
\Omega \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \\
(x, y) \arrow[r, mapsto] & f(x, y) \\
\text{vecteur de } \mathbb{R}^2 \arrow[u, dashed] & \text{nombre réel} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

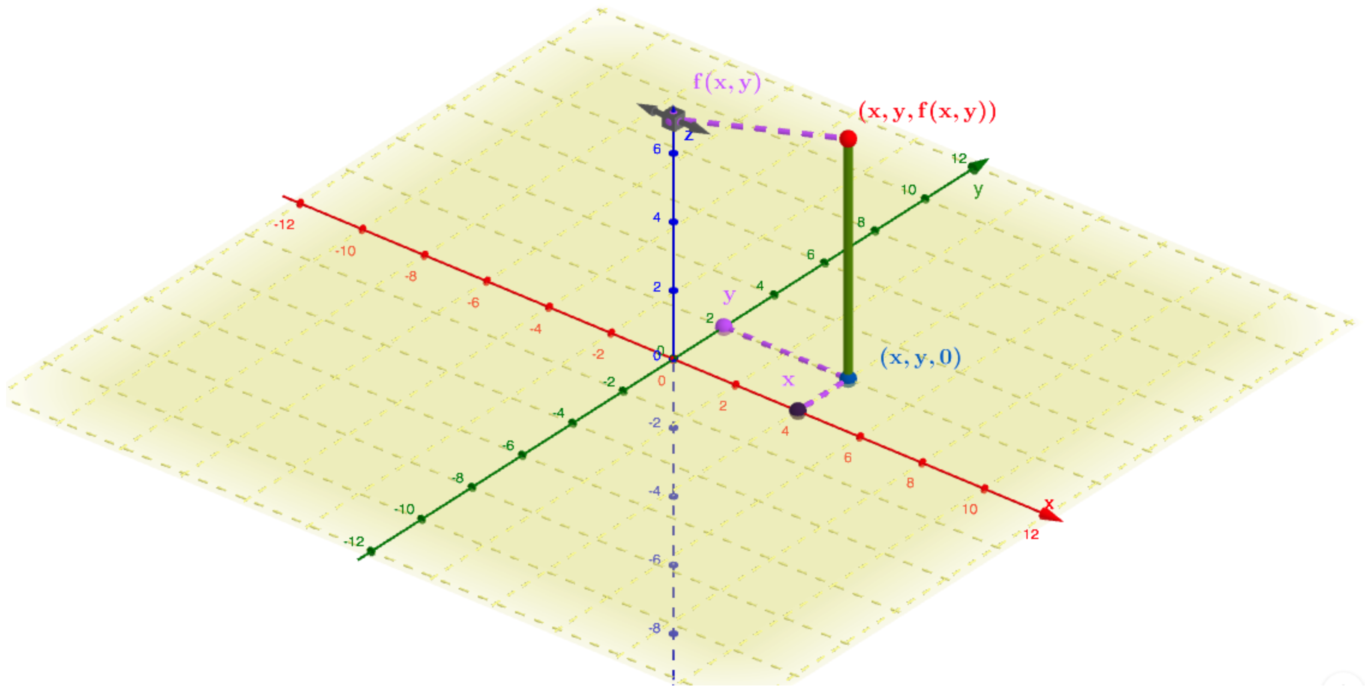
2.4.1 Le graphe de la fonction f

On appelle graphe de la fonction f la partie Γ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Gamma := \left\{(x, y, f(x, y)) \;:\; (x, y) \in \Omega\right\}$$

i.e. Γ est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ obtenus en faisant varier $(x, y) \in \Omega$.

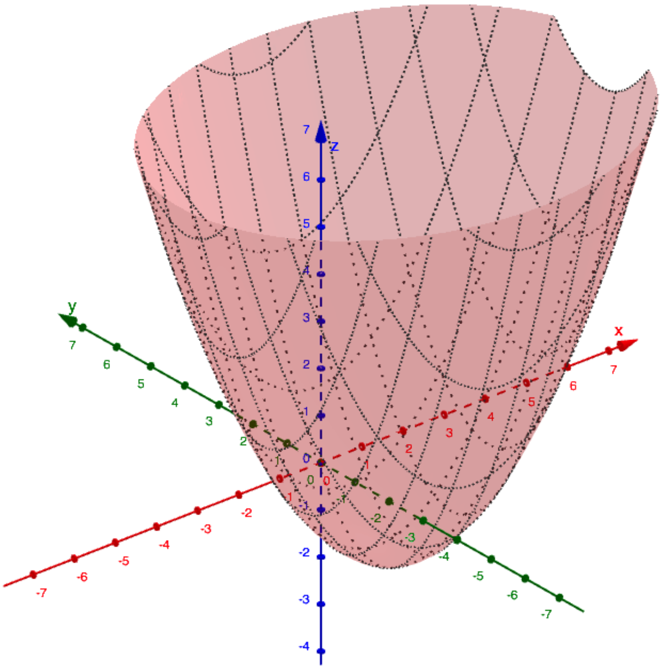
Un point du graphe Γ de f.



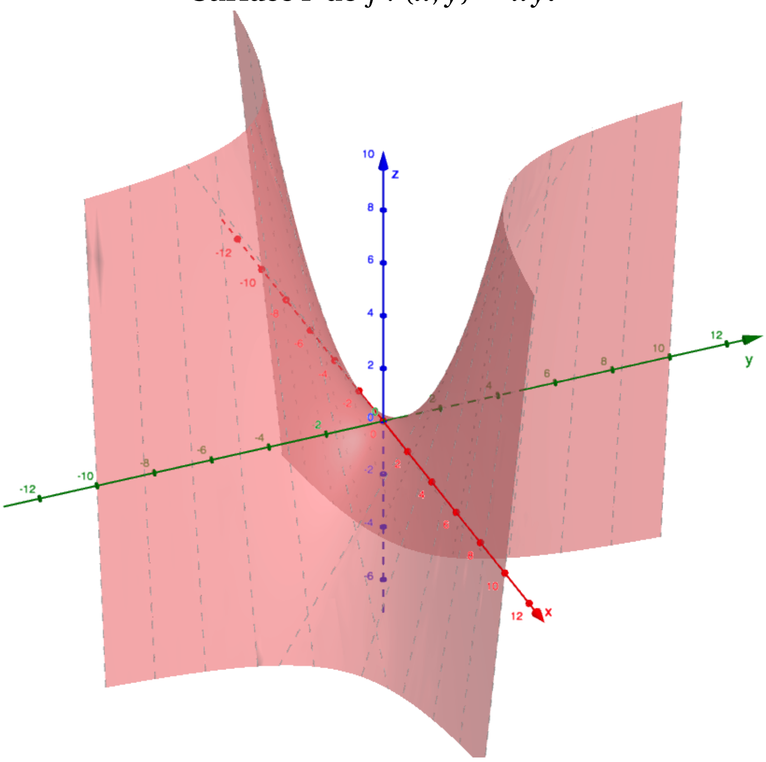
2.4.2 Si f est une continue son graphe est une surface (sens intuitif)

Si l'on suppose que la fonction f est continue sur Ω, alors son graphe Γ a l'allure d'une surface (sens intuitif), appelée parfois nappe.

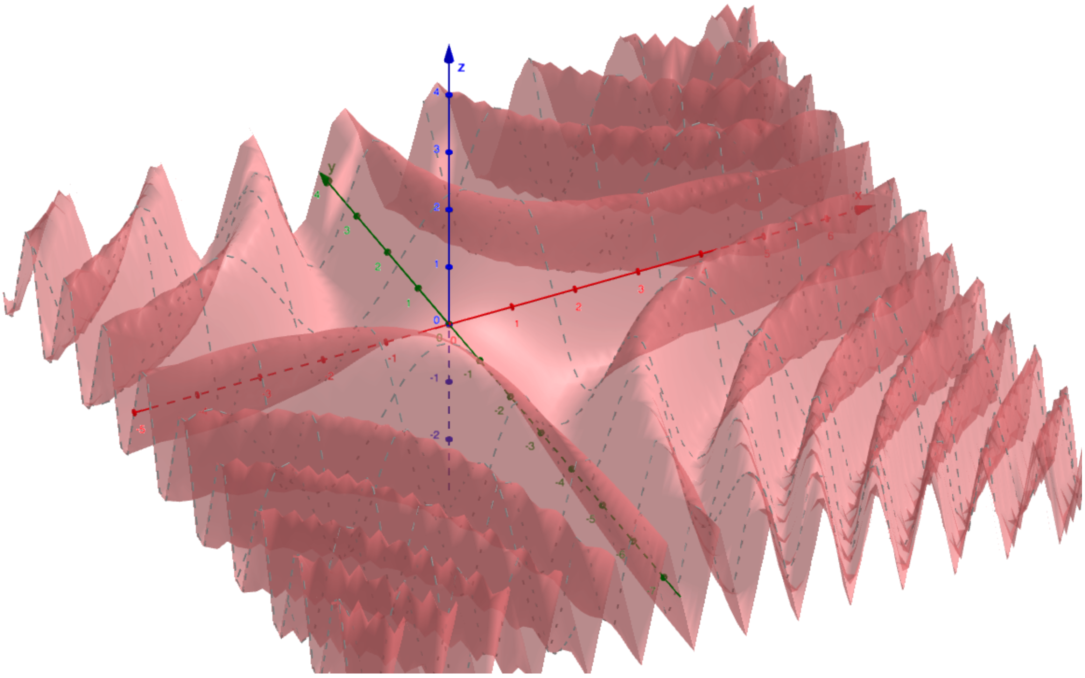
Surface Γ de $f:(x,y)\mapsto \dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{2}-2$.



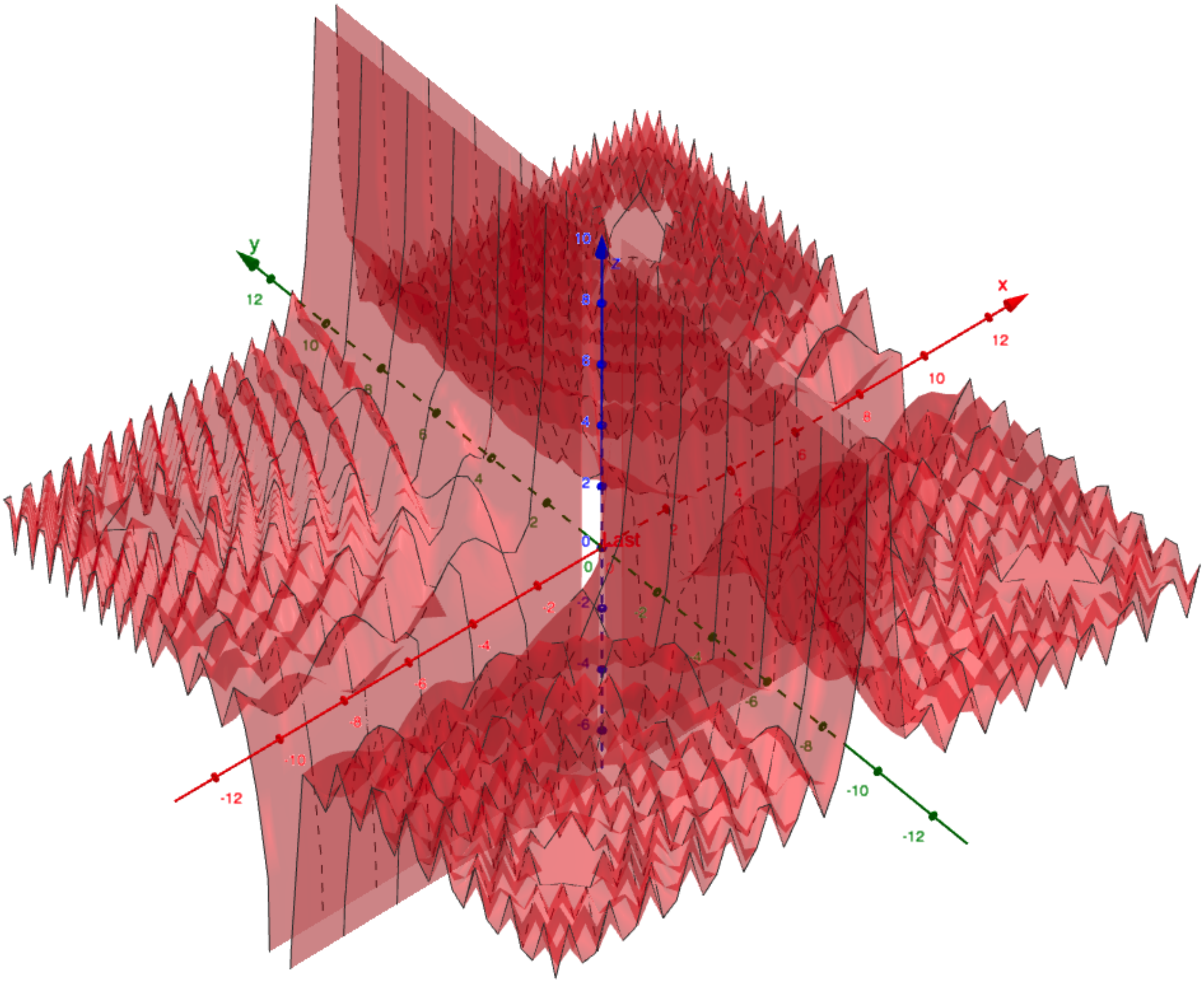
Surface Γ de $f:(x,y)\mapsto xy$.



Surface Γ de $f:(x,y)\longmapsto \sin(xy)$.



Surface Γ de $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}+\sin(xy)$.



2.4.3 Exemple d'étude d'extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Considérons de nouveau la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f:(x,y) \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{2} - 2 \end{array} \right.$$

et étudions ses extrema.

Comme $f(x,y)$ est une expression polynomiale en les variables x et y, f admet des dérivées partielles en tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.

Après calcul, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (a,b) \mapsto \frac{2}{3}(a-1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (a,b) \mapsto b+1\,.$$

Comme ces deux applications sont continues sur $\mathbb{R}^2$, le critère $\mathscr{C}^1$ s'applique : la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice de $\mathrm{d}f_{(a,b)}$ dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}(a-1) & b+1 \end{pmatrix}.$$

D'après la condition nécessaire pour être un extremum local, f admet un extremum local en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$a-1 = b+1 = 0$$

i.e. si $(a,b) = (1,-1)$. Il est clair que $f(1,-1) = -2$ est un minimum global de f.

Conclusion. La fonction f possède un unique extremum local. Il s'agit d'un minimum global, valant -2, atteint en l'unique point $(1,-1)$.

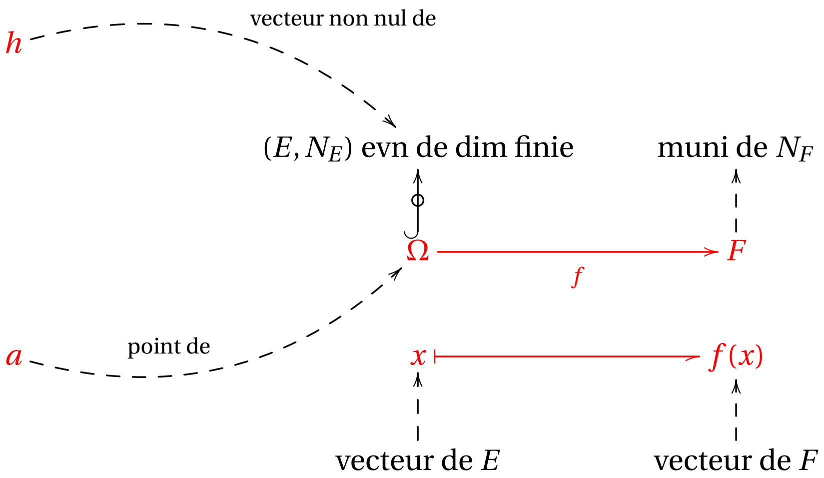
3 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

3.1 Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$

Soient

- E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) ;
- F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;
- Ω une partie ouverte de E ;
- $f : \Omega \to F$ une application ;
- a un point de Ω ;
- h un vecteur non nul de E.

On a donc la situation suivante



Lemme 20.1 (**Une fonction définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}}$**) — *La fonction de la variable réelle t*

$$\varphi_{a,h} : t \longmapsto f(a + t.h)$$

est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $0_{\mathbb{R}}$.

Démonstration —

- Introduisons la fonction $\tau_{a,h}$, la translation au point a suivant le vecteur h, définie par

$$\tau_{a,h} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & a + t.h \end{array} \right.$$

  Cette application est $N_E(h)$-lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$N_E(\tau_{a,h}(t_2) - \tau_{a,h}(t_1)) = N_E(a + t_2.h - (a + t_1.h))_E = N_E((t_2 - t_1).h) = N_E(h)\ |t_2 - t_1|\ .$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

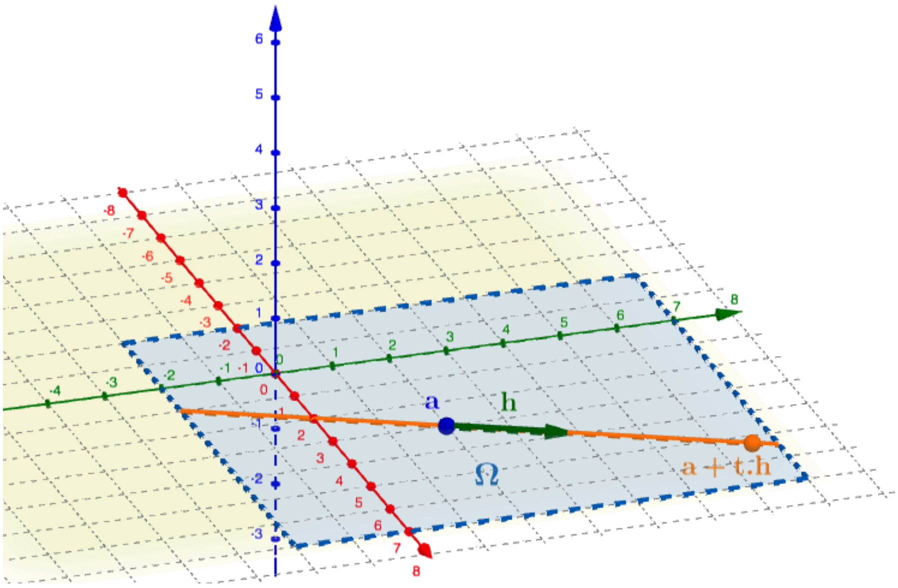
$$\begin{aligned} \varphi_{a,h} \text{ est définie en } t &\iff a + t.h \in \Omega \\ &\iff \tau_{a,h}(t) \in \Omega \\ &\iff t \in \tau_{a,h}^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

  Donc l'ensemble de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$ est $\tau_{a,h}^{-1}(\Omega)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme image réciproque de l'ouvert Ω de E par l'application continue $\tau_{a,h}$.

- De plus, il est clair que $\varphi_{a,h}$ est définie en $0_{\mathbb{R}}$, puisque $a + 0_{\mathbb{R}}.h = a \in \Omega$.

Q.E.D.

Illustration du domaine de définition de la fonction $\varphi_{a,h}$.



3.2 Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle

DÉFINITION 20.2 (Dérivée selon un vecteur) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes);*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes);*
- *Ω une partie ouverte de E;*
- *$f : \Omega \to F$ une application;*
- *a un point de Ω;*
- *h un vecteur non nul de E.*

Soit la fonction $\varphi_{a,h}$ de la variable t réelle

$$\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a + t.h)$$

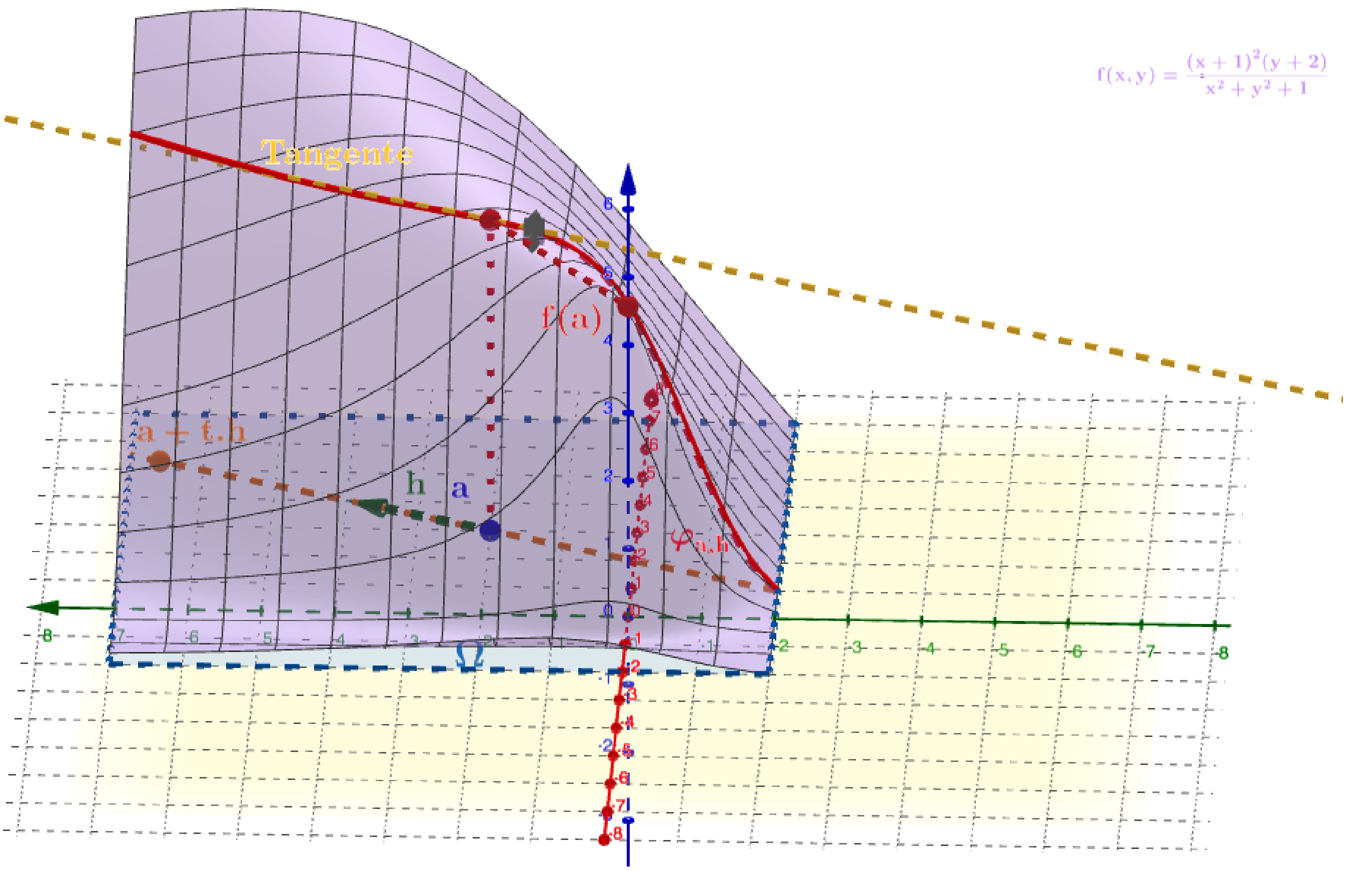
qui est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $0_{\mathbb{R}}$.

1. *On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur h si la fonction $\varphi_{a,h}$ est dérivable en 0.*
2. *Si f est dérivable en a suivant le vecteur h, alors on pose*

$$D_h f(a) := \varphi'_{a,h}(0) = \lim_{t \to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \in F$$

Ce vecteur de F est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h.

Illustration d'une dérivée en un point suivant un vecteur non nul.



EXEMPLE 20.3 — *L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet une dérivée selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ au point en $(0,0)$.
Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{f((0,0) + t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\,\frac{t^3\,h_1^3 - t^4\,h_2^4}{t^2\,h_1^2 + t^2\,h_2^2} = \frac{h_1^3 - t\,h_2^4}{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}\,.$$

Donc la fonction f est dérivable en $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ au point $(0,0)$ et

$$D_h f(0,0) = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}\,.$$

3.3 Dérivées partielles

DÉFINITION 20.4 (Dérivées partielles - cas général) — *Soient*

- *E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_E (elles sont toutes équivalentes) et d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$;*
- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de E ;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base $\mathscr{B}$ de E.*

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $\partial_i f(a)$, par

$$\boxed{\partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F}.$$

DÉFINITION 20.5 (Dérivées partielles - cas où la source est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) — *Soient*

- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F (elles sont toutes équivalentes) ;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ une application dérivable en a suivant tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, par

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in F}.$$

EXEMPLE 20.6 — *L'application f définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + xy + y^2 \end{array} \right. .$$

possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle de f en a.**
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$
  $$\varphi_{a,e_1}(t) := f(a + te_1) = f(a_1 + t, a_2) = (a_1 + t)^3 + (a_1 + t)a_2 + a_2^2 .$$
  Comme cette expression est polynomiale en t, elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et
  $$\frac{df(a + te_1)}{dt} = 3(a_1 + t)^2 + a_2 .$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \partial_1 f(a) = \left.\frac{df(a+te_1)}{dt}\right|_{t=0} = 3a_1^2 + a_2 .$$

Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x,y)$ par rapport à x, en supposant y constant, avant d'évaluer le résultat en $(x,y) = (a_1,a_2)$.

- **Deuxième dérivée partielle de f en a.**
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{a,e_2}(t) := f(a+te_2) = f(a_1, a_2+t) = a_1^3 + a_1(a_2+t) + (a_2+t)^2 .$$

Comme cette expression est polynomiale en t, elle est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{df(a+te_2)}{dt} = a_1 + 2(a_2+t) .$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) := \partial_2 f(a) = \left.\frac{df(a+te_2)}{dt}\right|_{t=0} = a_1 + 2a_2 .$$

Nous aurions obtenu la même formule si nous avions dérivé $f(x,y)$ par rapport à y, en supposant x constant, avant d'évaluer le résultat en $(x,y) = (a_1,a_2)$.

REMARQUE 20.7 (**Calcul pratique des dérivées partielles**) — *En pratique, lorsque l'on dispose d'une expression de f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la i-ème dérivée partielle se calcule en dérivant l'expression par rapport à la i-ème variable, les autres variables étant considérées comme des constantes, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*