Un corrigé du DL6
Fonctions harmoniques
M. Lucas

I — Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $f \in \mathscr{C}^{k+1}(U) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{C}^k(U)$ est linéaire.

Donc par composition et somme l'application Δ est linéaire de $\mathscr{C}^2(U)$ vers $\mathscr{C}^0(U)$. Or $\mathscr{H}(U)$ est le noyau de cette application linéaire ainsi

$$\boxed{\mathscr{H}(U) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^2(U,\mathbb{R}).}$$

Q 2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Ainsi toutes les dérivées partielles de f est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. En utilisant le théorème de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a :

$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta f)$$

Comme f est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a : $\forall x \in U,\ \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = 0$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{H}(U)$. Puis on peut procéder par récurrence ; l'initialisation étant triviale et pour l'hérédité, on utilise ce qui précède en remarquant que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1, \dots, i_{k+1} \in [\![1,n]\!], \text{ on a : } \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right)$$

On a montré

$$\boxed{\text{toute dérivée partielle à tout ordre de } f \text{ appartient à } \mathscr{H}(U).}$$

Q 3. **Analyse :** Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ telle que $f^2 \in \mathscr{H}(U)$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et ainsi $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ d'où

$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$$

Alors $\forall x \in U,\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 0$. Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a $\forall x \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ donc $\forall x \in U,\ \nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ or U est un ouvert connexe par arcs donc f est constante sur U.

Synthèse : On suppose que f est constante sur U alors f^2 également d'où

$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = 0 \text{ et } \Delta\left(f^2\right)(x) = 0$$

Ainsi f et f^2 sont harmoniques sur U

Conclusion : Si U est connexe par arcs,

$$\boxed{\text{les fonctions } f \text{ de } \mathscr{H}(U) \text{ telles que } f^2 \text{ appartienne aussi à } \mathscr{H}(U). \text{ sont les fonctions constantes.}}$$

Q 4. Comme U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, ceci nous fournit $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $r > 0$ tels que $D(a, r) \subset U$. Ainsi pour tout $t \in]a_1 - r, a_1 + r[$ (ensemble infini), on a $(t, a_2, \dots, a_n) \in U$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi : (x_1, \dots, x_n) \in U \longmapsto x_1 \in \mathbb{R} \text{ est clairement harmonique sur } U \text{ sans y être constante.}}$$

De plus $\forall x \in U,\ \Delta\left(\varphi^2\right)(x) = 2 \neq 0$ donc $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$ n'est pas harmonique sur U.

$$\boxed{\text{Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas une fonction harmonique, en général.}}$$

II — Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q 5. *Remarque : on a f de classe $\mathscr{C}^2$ par produit car $(x, y) \longmapsto u(x)$ et $(x, y) \longmapsto v(y)$ le sont.*

On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$. Comme v est non identiquement nulle, ceci nous fournit $t \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) \neq 0$. En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x, y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = \left(v''(y) - \lambda v(y)\right)u(x)$. En prenant $t' \in \mathbb{R}$ tel que $u(t') \neq 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 = v''(y) - \lambda v(y)$. Ainsi

$$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } u \text{ et } v \text{ soient solutions respectives des équations } z'' + \lambda z = 0 \text{ et } z'' - \lambda z = 0.}$$

Q 6. Je note les équations différentielles $E_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 :\ z'' - \lambda z = 0$.

Si $\lambda = 0$ Les solutions de E_1 (ou E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax + B$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda > 0$ Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.

Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A'\cosh\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B'\sinh\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A' et $B' \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda < 0$ Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$. Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A'\cosh\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B'\sinh\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A' et $B' \in \mathbb{R}$.

Réciproquement : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v solutions non nulles respectives de $E_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 :\ z'' - \lambda z = 0$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f : (x, y) \longmapsto u(x)v(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Et on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$ donc f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel.

Une fonction f à variables séparables sur $\mathbb{R}^2$ est harmonique non nulles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, (A,B) et $(A',B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que

$$\begin{array}{llll} \text{si} & \lambda = 0 & \text{alors} & f:(x,y) \longmapsto (Ax+B)\left(A'y+B'\right) \\ \text{si} & \lambda > 0 & \text{alors} & f:(x,y) \longmapsto \left(A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)+B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(A'\cosh\left(y\sqrt{\lambda}\right)+B'\sinh\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right) \\ \text{si} & \lambda < 0 & \text{alors} & f:(x,y) \longmapsto \left(A\cosh\left(x\sqrt{-\lambda}\right)+B\sinh\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(A'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right)+B'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right) \end{array}$$

II.B -

Q 7. Les fonctions $(r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par produits. Donc la fonction $(r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par composantes. De plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ où f y est de classe $\mathscr{C}^2$. Donc par composition

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}.}$$

Q 8. On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).}$$

Q 9. On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathscr{C}^2$ on a

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).}$$

Puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\\ &\quad + r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

et à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathscr{C}^2$, on a :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) +\\ r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{gathered}}$$

Q 10. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right).$$

On suppose que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ avec ce qui précède :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0.$$

Or pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et ainsi $\forall (x,y)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Delta f(x,y) = 0$ d'où $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$\boxed{f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0}$$

Q 11. **Analyse :** On considère f une fonction harmonique radiale de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note g comme ci dessus. On peut alors trouver h fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ g(r,\theta) = h(r)$. Comme g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ alors h l'est sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = h''(r).$$

La question précédente donne alors : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2 h''(r) + rh'(r) = 0$ donc h' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $tz' + z = 0$. Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $A \in \mathbb{R}$ tel que $h' : r \longmapsto A/r$. Ce qui nous fournit $B \in \mathbb{R}$ tel que $h : r \longmapsto A\ln(r) + B$ donc $g : (r,\theta) \longmapsto A\ln(r) + B$ puis $f : (x,y) \longmapsto A\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + B$.

Synthèse : On suppose qu'il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $f : (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2) + B$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et radiale car la fonction $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) = 2A\ln(r) + B$ est indépendante de θ et on vérifie facilement que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ donc $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ d'après Q10.

$$\boxed{\text{les fonctions harmoniques radiales de } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2) + B \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

Q 12. En me servant de la question précédente, on cherche A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 2A\ln(r_1)+B=a \\ 2A\ln(r_2)+B=b \end{cases}$. On remarque que $A=\dfrac{b-a}{2\,(\ln(r_2)-\ln(r_1))}$ et $B=\dfrac{\ln(r_2)a-\ln(r_1)b}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}$ conviennent. Alors d'après Q11, en prenant

$$\boxed{f:(x,y)\longmapsto \frac{(b-a)\ln(x^2+y^2)+2\ln(r_2)a-2\ln(r_1)b}{2\,(\ln(r_2)-\ln(r_1))} \text{ sur } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \text{ on a } \begin{cases} f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\mathbb{R}) \\ \Delta f=0 \\ f(x,y)=a \text{ si } \|(x,y)\|=r_1 \\ f(x,y)=b \text{ si } \|(x,y)\|=r_2 \end{cases}}$$

II.C -

Q 13. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit $r_0=\|(x_0+y_0)\|$ tel que $u(r_0)\neq 0$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta+2\pi)=f(r\cos(\theta+2\pi),r\sin(\theta+2\pi))=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=u(r_0)v(\theta)$ d'où $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$. Ainsi

$$\boxed{\text{si } f \text{ n'est pas identiquement nulle, alors } v \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

Q 14. On suppose que f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On note g comme en II.B. Alors g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ et

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=u(r)v''(\theta) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=u'(r)v(\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=u''(r)v(\theta).$$

En utilisant Q10 : on a $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta)=0$. Comme f est non identiquement nulle, il existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0)\neq 0$. En prenant $\lambda=\dfrac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors

$$\boxed{u \text{ est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2z''(r)+rz'(r)-\lambda z(r)=0.}$$

On choisit $r_0>0$ tel que $u(r_0)\neq 0$, on a alors

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ v''(\theta)+\frac{r_0^2u''(r_0)+r_0u'(r_0)}{u(r_0)}v(\theta)=0.$$

Comme u est solution de l'équation différentielle (II.1), on a : $\dfrac{r_0^2u''(r_0)+r_0u'(r_0)}{u(r_0)}=\lambda$. Ainsi

$$\boxed{v \text{ est solution de l'équation différentielle (II.2) : } z''(\theta)+\lambda z(\theta)=0.}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda=0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

$$\boxed{\text{Les solutions } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes.}}$$

Q 16. En faisant comme en Q11. :

$$\boxed{\text{Les solutions de (II.1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les fonctions de la forme } r\longmapsto A\ln(r)+B}$$

Q 17. D'après Q15. dans le cas où $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales. Il est clair que toutes fonctions radiale sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est à variables polaires séparable. Alors d'après Q11.,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions :}\\ (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2)+B \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}.\end{array}}$$

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. **Analyse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel qu'il existe v solution non nulles 2π-périodiques de (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

Par l'absurde si $\lambda < 0$, comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto A\mathrm{e}^{\theta\sqrt{-\lambda}} + B\mathrm{e}^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Si $A \neq 0$, alors $\lim\limits_{\theta\to+\infty} |v(\theta)| = +\infty$.
Si $A = 0$, alors $B \neq 0$ et $\lim\limits_{\theta\to-\infty} |v(\theta)| = +\infty$.
Or $v(\mathbb{R}) = v([0,2\pi])$ car v est 2π-périodique et d'après le théorème des bornes atteintes v est bornée sur le segment $[0,2\pi]$ car v y est continue d'où v est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui est en contradiction avec les limites. Ainsi $\lambda > 0$. Comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto A\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi $v' : \theta \longmapsto -A\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + B\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$. Or on a $v(0) = v(2\pi)$ et $v'(0) = v'(2\pi)$ donc $\begin{cases} A\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = A \\ B\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = B \end{cases}$ d'où $\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 1$ car $(A,B) \neq (0,0)$. Ceci nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$. Donc $\lambda = k^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Synthèse : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\lambda = k^2$. Alors $\lambda > 0$ et $\sqrt{\lambda} = k$. Les solution de (II.2) sont les fonctions $\theta \longmapsto A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Elles sont toutes $2\pi/k$ périodiques donc 2π périodiques. En prenant $(A,B) = (1,0)$, on a une solution non nulle.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour que (II.2) admette des solutions } 2\pi\text{-périodiques non nulles,}\\ \text{il faut et il suffit qu'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \lambda = k^2.\end{array}}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les solutions non nulles } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les}\\ \theta \longmapsto A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\end{array}}$$

Q 19. Soit z de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ On pose $Z : t \longmapsto z\left(\mathrm{e}^t\right)$. Alors par composition Z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall r > 0,\ z(r) = Z(\ln(r))$.
Réciproquement si Z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $z : r \longmapsto Z(\ln(r))$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $r > 0$, on a $z(r) = Z(\ln(r))$ et $z'(r) = \dfrac{Z'(\ln(r))}{r}$ et aussi $z''(r) = \dfrac{Z''(\ln(r)) - Z'(\ln(r))}{r^2}$. Ainsi $r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r))$. Comme ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, z est solution de (II.1) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ Z''(t) - \lambda Z(t) = 0$. On a déjà vu cette équation en w : $w'' - \lambda w = 0$ (II.1b). Grâce à la remarque sur la classe $\mathscr{C}^2$, en début de question, on a une bijection (qui à z associe Z) entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \lambda > 0\text{, les solutions de (II.1), sont les fonctions}\\ r \longmapsto A\exp\left(\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) + B\exp\left(-\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \lambda<0\text{, les solutions de (II.1), sont les fonctions}\\ r\longmapsto A\cos\left(\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right)+B\sin\left(-\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right)\text{ avec }(A,B)\in\mathbb{R}^2.\end{array}}$$

Q 20. Analyse : On suppose que f est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes, on peut trouver $k\in\mathbb{N}^*$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $(A',B')\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tels que

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\left(A'\exp(\ln(r)k)+B'\exp(-\ln(r)k)\right)\times(A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)).$$

Je note $v:\theta\longmapsto A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$ donc $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\left(A'r^k+B'r^{-k}\right)v(\theta)$. Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $v(\alpha)\neq 0$. Comme il existe $\ell\in\mathbb{R}$, tel que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell$$

alors $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\ell$. Donc $r\longmapsto A'r^k+B'r^{-k}$ admet une limite finie en 0 donc $B'=0$.

Synthèse On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=r^k(A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)).$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle. Alors f est bien définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ à variables polaires séparables de plus f est alors de classe $\mathscr{C}^2$ d'après l'énoncé (II.C) car $u:r\mapsto r^k$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $v:\theta\longmapsto A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$ est 2π-périodique et $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit g comme en II.B. Pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$:

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=k(k-1)g(r,\theta)\ \text{ et }\ r\frac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta)=kg(r,\theta)\ \text{ et }\ \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=-k^2g(r,\theta)$$

donc $r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta)=0$ d'où f est harmonique sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ d'après Q10. De plus $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ \left|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\right|\leqslant(|A|+|B|)\,r^k$ donc

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|f(x,y)\right|\leqslant(|A|+|B|)(x^2+y^2)^{k/2}.$$

Or $(x^2+y^2)^{k/2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ donc $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ Ainsi f se prolonge par continuité en 0.

> Les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0,0)$ sont les fonctions f vérifiant
>
> $$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=r^k(A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta))$$
>
> avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et $k\in\mathbb{N}^*$