DL6
Fonctions harmoniques

Notations

- Le symbole n désigne un entier strictement positif.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$D(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x-a\| < R\}$$
La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a,R)}$.
- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in U,\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$
- Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = 0$$
L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathscr{H}(U)$.

I — Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathscr{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathscr{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathscr{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathscr{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II — Exemples de fonctions harmoniques

II.A - On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = u(x)v(y)$$
On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations
$$z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B - Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \;\text{ et }\; \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 9. Exprimer également $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Q 10. Montrer que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathscr{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \;\text{ si }\; \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \;\text{ si }\; \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C - Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, $u : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)\,v(\theta)$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?