Un corrigé du DL5 – calcul différentiel

Énoncé. Soient $\mathscr{U}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathscr{U} :=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}\,. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la partie $\mathscr{U}$ est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que la fonction f est minorée, mais non majorée sur $\mathscr{U}$.
3. Justifier que f est différentiable sur $\mathscr{U}$ et préciser son gradient, en tout point $(x,y)\in\mathscr{U}$.
4. Déterminer l'ensemble des points critiques de l'application f.
5. On étudie dans cette question les extrema éventuels de deux fonctions de la variable réelle auxiliaires.
   (a) Étudier les extrema éventuels de la fonction g définie par
   $$g \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2z+\dfrac{1}{z^2}\,. \end{array} \right.$$
   (b) Soient $y\in]0,+\infty[$ fixé. Étudier les extrema éventuels de la fonction
   $$f_y \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y)=xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}\,. \end{array} \right.$$
6. Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).

Un corrigé.

1. • On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme sup définie par
   $$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \big\|(x,y)\big\| = \max\big(|x|,|y|\big)\,.$$
   • Soit $(a,b)\in\mathscr{U}$. On pose $r:=\min(a,b)$. Comme $(a,b)\in\mathscr{U}$, $r>0$. On remarque que
   $$\begin{aligned} B_{\|\cdot\|}((a,b),r) &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \big\|(x,y)-(a,b)\big\|<r\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \max|x-a|,\big|y-b\big|<r\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x-a|<r \text{ et } \big|y-b\big|<r\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, a-r<x<a+r \text{ et } b-r<y<b+r\big\} \\ &= \Big]\underbrace{a-r}_{\leq 0},\, a+r\Big[\,\times\,\Big]\underbrace{b-r}_{>0},\, b+r\Big[\,. \end{aligned}$$
   Donc $B_{\|\cdot\|}((a,b),r)\subset\mathscr{U}$.

- La partie $\mathscr{U}$ est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

2. • Soit $(x,y)\in\mathscr{U}$. Comme $x>0$ et $y>0$

$$f(x,y)=xy+\frac{4}{x}+\frac{2}{y}\geq 0\,.$$

Donc la fonction f est minorée par 0 sur $\mathscr{U}$.

- Comme

$$f(x,x)=x^2+\frac{6}{x}\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{}+\infty$$

la fonction f n'est pas majorée sur $\mathscr{U}$.

3. • Soit $y\in\,]0,+\infty[$ fixé. L'application

$$f(\cdot,y)\colon x\mapsto f(x,y)=xy+\frac{4}{x}+\frac{2}{y}$$

est dérivable, car c'est une fonction rationnelle. Donc la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en tout point de $\mathscr{U}$. Celle-ci est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{U}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&y-\dfrac{4}{x^2}\end{array}\right.$$

qui est une fonction <u>continue sur $\mathscr{U}$</u>.

- Soit $x\in\,]0,+\infty[$ fixé. L'application

$$f(x,\cdot)\colon y\mapsto f(x,y)=xy+\frac{4}{x}+\frac{2}{y}$$

est dérivable, car c'est une fonction rationnelle. Donc la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en tout point de $\mathscr{U}$. Celle-ci est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{U}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&x-\dfrac{2}{y^2}\end{array}\right.$$

qui est une fonction <u>continue sur $\mathscr{U}$</u>.

- D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, donc différentiable sur $\mathscr{U}$.
- De plus pour tout $(x,y)\in\mathscr{U}$, nous savons

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(y-\frac{4}{x^2}\,,\,x-\frac{2}{y^2}\right).$$

4. • **Analyse.**
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ un point critique de f. Alors d'après la question 2

$$y-\frac{4}{x^2}=0\quad\text{et}\quad x-\frac{2}{y^2}=0$$

donc

$$y-\frac{4}{x^2}=0\quad\text{et}\quad x-\frac{x^4}{8}=0$$

Comme

$$x-\frac{x^4}{8}=x\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)=x\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(\underbrace{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}_{\Delta=-3/4<0}\right)$$

et $x>0$, il vient $x=2$. Comme $y-\dfrac{4}{x^2}=0$, $y=1$. Donc f possède au plus un point critique : $(2,1)$.

- **Synthèse.**
  Vérifions si $(2,1)$ est un point critique de f.

$$\nabla f(2,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right)=(0,0).$$

Conclusion.
La fonction f possède un unique point critique : $(2,1)$.

5. (a)
   - La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle.
   - De plus

$$\forall\, z>0,\quad g'(z)=2-\frac{2}{z^3}=\frac{2}{z^3}\,(z^3-1)=\frac{2}{z^3}\,(z-1)\left(\underbrace{z^2+z+1}_{\Delta=-3<0}\right)$$

   - La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   - La fonction g atteint un mimimum au point 1, valant 3.
   - Elle n'est par ailleurs pas majorée, puisque

$$g(z)=2z+\frac{1}{z^2}\xrightarrow[z\to+\infty]{}+\infty\,.$$

   (b)
   - La fonction f_y est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle.
   - De plus

$$\forall\, x>0,\quad f_y'(x)=y-\frac{4}{x^2}=\frac{y}{x^2}\left(x^2-\frac{4}{y}\right)=\frac{y}{x^2}\left(x-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{y}}\right).$$

   - La fonction f_y est donc strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{2}{\sqrt{y}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{y}},+\infty\right[$.
   - La fonction f_y atteint un mimimum au point $\dfrac{2}{\sqrt{y}}$, valant

$$f_y\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)=f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\,,\,y\right)=4\sqrt{y}+\frac{2}{y}=2\left(2\sqrt{y}+\frac{1}{y}\right)=2\,g(\sqrt{y})\geq 6$$

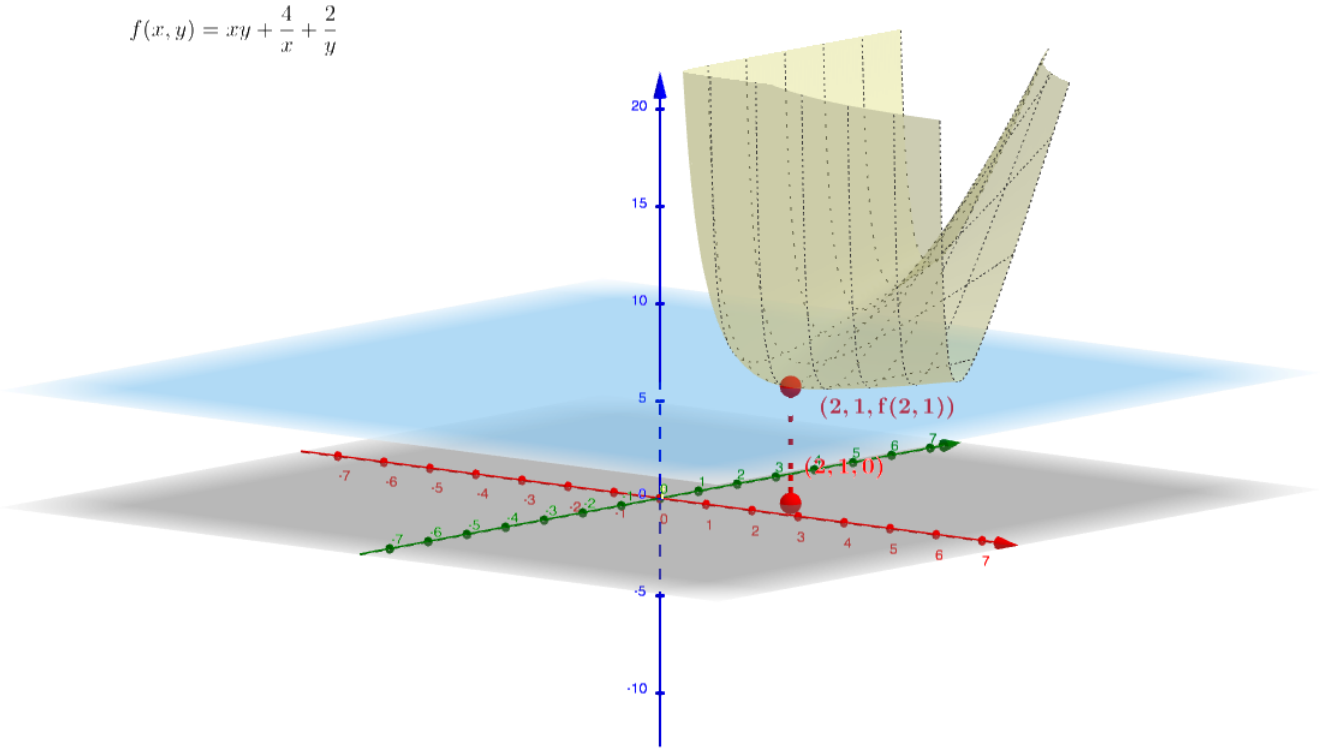
     d'après la Question 5.(a).
   - Elle n'est par ailleurs pas majorée, puisque

$$f_y(y)=f(y,y)=y^2+\frac{6}{y}\xrightarrow[y\to+\infty]{}+\infty\,.$$

6. - **Détermination des points à étudier.**
     Comme $\mathscr{U}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, si la fonction f atteint un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f, d'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum. Il y a donc un seul point à étudier, d'après la Question 4.

- **Étude du point critique** $(2,1)$ **de** f**.**
  D'après la Question 5.(b)

$$\forall\,(x,y)\in\mathscr{U},\quad f(x,y)=f_y(x)\geq 6=f(2,1)\,.$$

  La fonction f atteint donc au point $(2,1)$ un minimum global, valant 6.

- **Vérification de la cohérence.**
  Les résultats obtenus sont cohérents avec le graphe de f ci-dessous **[Geogebra3D]** .