DL5 – calcul différentiel

Énoncé. Soient $\mathscr{U}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathscr{U} :=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} \, . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la partie $\mathscr{U}$ est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que la fonction f est minorée, mais non majorée sur $\mathscr{U}$.
3. Justifier que f est différentiable sur $\mathscr{U}$ et préciser son gradient, en tout point $(x,y) \in \mathscr{U}$.
4. Déterminer l'ensemble des points critiques de l'application f.
5. On étudie dans cette question les extrema éventuels de deux fonctions de la variable réelle auxiliaires.
   (a) Étudier les extrema éventuels de la fonction g définie par
   $$g \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2z + \dfrac{1}{z^2} \, . \end{array} \right.$$
   (b) Soient $y \in]0,+\infty[$ fixé. Étudier les extrema éventuels de la fonction
   $$f_y \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} \, . \end{array} \right.$$
6. Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).