Un corrigé du DL4 – calcul différentiel

Énoncé.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Démontrer que l'application

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t, y+t) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,.$$

2. On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient

$$\forall\,(x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)\,.$$

   (a) **Analyse.**
   Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall\,(x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)\,.$$

   i. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\,.$$

   ii. Soient a, b, c, d quatre réels fixés et soit l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & f(au+bv, cu+dv)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que l'application g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ en fonction des dérivées partielles de f.

   iii. En choisissant $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de telle sorte que
   - pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$;
   - la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$;

   démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x-y)\,.$$

   (b) **Synthèse.**
   Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On lui associe la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x-y)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall\,(x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x, y)\,.$$

   (c) **Conclusion.**
   Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif exposé au début de la question 2.

Un corrigé.

1.
   - On introduit l'arc γ défini par
   $$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x+t, y+t)\,. \end{array} \right.$$
   L'arc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ses fonctions composantes $t \mapsto x+t$ et $t \mapsto y+t$ le sont. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $$\gamma'(t) = (1,1)\,.$$
   - La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Le résultat sur la dérivation le long d'un arc s'applique : la fonction $\tau = f \circ \gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $$\begin{aligned} \tau'(t) &= \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot (1,1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) \times 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,. \end{aligned}$$

2. (a) i. Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et considérons à nouveau la fonction
   $$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t, y+t) \end{array} \right.$$
   introduite dans la question 1. Nous savons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,.$$
   De l'hypothèse faite sur f, nous déduisons
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tau'(t) = 0\,.$$
   En confrontant les deux formules obtenues, il vient
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = 0\,.$$
   En spécialisant ce résultat à $t \leftarrow 0$, nous obtenons
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

   ii.
   - Soit L l'application définie par
   $$L \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \Big(\underbrace{au+bv}_{L_1(u,v)}, \underbrace{cu+dv}_{L_2(u,v)}\Big) \end{array} \right.$$
   qui est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme L est linéaire, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
   $$\mathrm{d}L(u,v) = L\,.$$

- Comme l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, l'application $g = f \circ L$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions différentiables.
- D'après la règle de la chaîne, on obtient, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(au+bv,cu+dv) \times \frac{\partial L_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(au+bv,cu+dv) \times \frac{\partial L_2}{\partial v}(u,v) \\ &= b\,\frac{\partial f}{\partial x}(au+bv,cu+dv) + d\,\frac{\partial f}{\partial y}(au+bv,cu+dv)\,.\end{aligned}$$

iii. On applique le résultat de la question 2.(a).ii en spécialisant à

$$a \leftarrow 1 \quad ; \quad b \leftarrow 1 \quad ; \quad c \leftarrow 0 \quad ; \quad d \leftarrow 1\,.$$

Alors l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(u+v,v) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(au+bv,cu+dv) + \frac{\partial f}{\partial y}(au+bv,cu+dv) = 0$$

d'après l'hypothèse faite sur f. Ainsi, si on introduit l'application φ définie par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,0) \end{array} \right.$$

qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de l'application linéaire $u \in \mathbb{R} \mapsto (u,0) \in \mathbb{R}^2$, par l'application différentiable f) on a

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u+v,v) = g(u,v) = g(u,0) = \varphi(u)\,.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En spécialisant le résultat précédent à $u \leftarrow x-y$ et $v \leftarrow y$ il vient

$$f(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

(b) **Synthèse.**

- Comme φ est une application dérivable en une variable réelle, elle est différentiable sur $\mathbb{R}$.
- Soit Δ l'application définie par

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y\,. \end{array} \right.$$

  Comme Δ est linéaire, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
- L'application $f = \varphi \circ \Delta$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions différentiables.
- Enfin, pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x+t,y+t) = \varphi((x+t)-(y+t)) = \varphi(x-y) = f(x,y)\,.$$

(c) **Conclusion.**
D'après l'étude menée, une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)$$

si et seulement si elle est de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x-y) \end{array} \right.$$

où $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.