DL4 – calcul différentiel

Énoncé.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Démontrer que l'application

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t, y+t) \end{array} \right.$$

   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,.$$

2. On souhaite déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)\,.$$

   (a) **Analyse.**
   Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)\,.$$

   i. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

   ii. Soient a,b,c,d quatre réels fixés et soit l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(au+bv, cu+dv)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que l'application g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f.

   iii. En choisissant $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ de telle sorte que
   - pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$;
   - la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$;

   démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

   (b) **Synthèse.**
   Soit une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On lui associe la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x-y)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)\,.$$

   (c) **Conclusion.**
   Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif exposé au début de la question 2.