Un corrigé du DL3 – calcul différentiel

Énoncé.
Soit f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 - 3x + xy^2 \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est appelé **point critique de** f si $\mathrm{d}f(x,y) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$. Déterminer les points critiques de f.

Corrigé.

1.
   - **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.**
     Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
     $$f(\cdot, y) : x \mapsto f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$
     est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par
     $$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \, ; \, (x,y) \mapsto 3x^2 - 3 + y^2$$
     qui est <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.
   - **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.**
     Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
     $$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$
     est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par
     $$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \, ; \, (x,y) \mapsto 2xy$$
   - D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$
2.
   - Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après le cours, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$
     $$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}f(x,y) \cdot (h_1, h_2) & = & h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial 2}(x,y) \\ & = & h_1 \left(3x^2 - 3 + y^2\right) + h_2 \left(2xy\right) . \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \left(3x^2-3+y^2=0\right) \text{ et } \left(2xy=0\right) \\
&\iff \left(3x^2-3+y^2=0\right) \text{ et } \left(x=0 \text{ ou } y=0\right) \\
&\iff \left(3x^2-3+y^2=0 \text{ et } x=0\right) \text{ ou } \left(3x^2-3+y^2=0 \text{ et } y=0\right) \\
&\iff \left(x=0 \text{ et } y=\pm\sqrt{3}\right) \text{ ou } \left(x=\pm 1 \text{ et } y=0\right)
\end{aligned}$$

L'ensemble des points critiques de f est donc

$$\left\{\left(0,-\sqrt{3}\right),\left(0,\sqrt{3}\right),(1,0),(-1,0)\right\}.$$

- Le graphe de f et ses quatre points critiques **[Geogebra3D]** .

$f:(x,y)\mapsto x^3-3x+xy^2$ et ses 4 points critiques