Un corrigé du DL2 – calcul différentiel

Énoncé.
On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme eucidienne, définie par

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

1. Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).

2. Démontrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'application $\mathrm{d}f(x,y)$ est 3-lipschitzienne.

Corrigé.

1. - **Introduction des fonctions coordonnées.**
   Si on pose

   $$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y)\mapsto \sin(x+2y) \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y)\mapsto \cos(2x+y)$$

   alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

   - **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$.**
   Soit $y\in\mathbb{R}$ fixé. L'application

   $$f_1(\cdot,y) :\ x\mapsto f_1(x,y) = \sin(x+2y)$$

   est la composée d'une fonction affine par sin, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_1 par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

   $$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y)\mapsto \cos(x+2y)$$

   qui est <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

   - **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$.**
   Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. L'application

   $$f_1(x,\cdot) :\ y\mapsto f_1(x,y) = \sin(x+2y)$$

   est la composée d'une fonction affine par sin, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_1 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

   $$\frac{\partial f_1}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y)\mapsto 2\cos(x+2y)$$

   qui est <u>continue sur $\mathbb{R}^2$</u>.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f_2(\cdot, y) : x \mapsto f_2(x,y) = \cos(2x+y)$$
  est la composée d'une fonction affine par cos, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par
  $$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y) \mapsto -2\sin(2x+y)$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f_2(x, \cdot) : y \mapsto f_2(x,y) = \cos(2x+y)$$
  est la composée d'une fonction affine par cos, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par
  $$\frac{\partial f_2}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y) \mapsto -\sin(2x+y)$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\,\mathrm{d}f(x,y)) = \begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ & \\ -2\sin(2x+y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$$
  où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et donc pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$
  $$\mathrm{d}f(x,y)\cdot(h_1,h_2) = \big(\cos(x+2y)\,h_1 \,+\, 2\cos(x+2y)\,h_2\,,\, -2\sin(2x+y)\,h_1 \,-\, \sin(2x+y)\,h_2\big)\,.$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer que $\mathrm{d}f(x,y)$ est 3-lipschitzienne.
Comme l'application $\mathrm{d}f(x,y)$ est linéaire, il suffit de prouver que pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$
$$\big\|\,\mathrm{d}f(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\| \leq 3\ \|(h_1,h_2)\|$$
i.e. que
$$\big\|\,\mathrm{d}f(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 \leq 9\ \|(h_1,h_2)\|^2\,.$$
Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 1
$$\begin{aligned}
\big\|\,\mathrm{d}f(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 &= \big\|\big(\cos(x+2y)\,h_1 \,+\, 2\cos(x+2y)\,h_2\,,\, -2\sin(2x+y)\,h_1 \,-\, \sin(2x+y)\,h_2\big)\big\|^2 \\
&= \big(\cos(x+2y)\,h_1 \,+\, 2\cos(x+2y)\,h_2\big)^2 + \big(-2\sin(2x+y)\,h_1 \,-\, \sin(2x+y)\,h_2\big)^2 \\
&= \cos^2(x+2y)\,(h_1+2h_2)^2 + \sin^2(2x+y)(2h_1+h_2)^2 \\
&\leq (h_1+2h_2)^2 + (2h_1+h_2)^2 \quad \big[\cos^2(x+2y) \leq 1 \text{ et } \sin^2(2x+y) \leq 1\big] \\
&= 5\,h_1^2 + 8\,h_1\,h_2 + 5\,h_2^2
\end{aligned}$$
Puisque $(h_1-h_2)^2 \geq 0$, $h_1\,h_2 \leq \dfrac{1}{2}\,(h_1^2+h_2^2)$ et donc
$$\big\|\,\mathrm{d}f(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 \leq 5\,h_1^2 + 4\,(h_1^2+h_2^2) + 5\,h_2^2 = 9\,(h_1^2+h_2^2) = 9\ \|(h_1,h_2)\|^2\,.$$
Le résultat est donc démontré.