Un corrigé du DL1 – calcul différentiel

- Prouvons d'abord que f n'est pas continue en $(0,0)$.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  $$f\left(e^{-n^2}, \frac{1}{n}\right) = -1$$
  qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini.

- Fixons maintenant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, et démontrons que f admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$.
  Soit $t \neq 0$. On a
  $$\frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} tb^2\big(\ln|t| + \ln|a|\big) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
  Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 (en particulier, parce que $t\ln|t|$ tend vers 0 en 0, par croissances comparées). Ainsi, f admet en $(0,0)$ une dérivée suivant le vecteur (a,b) qui est nulle.

- De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  $$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\ .$$

- D'autre part, fixons $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et prouvons que g admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$.
  On a, pour $t \neq 0$,
  $$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} = \frac{t^3a^2b}{t \times (t^4a^4 + t^2b^2)} = \frac{a^2b}{t^2a^4 + b^2}.$$
  Si $b = 0$, ceci est nul, sinon
  $$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{a^2}{b}.$$
  Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée en $(0,0)$ suivant le vecteur (a,b) qui vaut $\dfrac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et qui vaut 0 si $b = 0$.