

DL1 – calcul différentiel

Énoncé.

Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^2 par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que les fonctions f et g admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0, 0)$.
2. Démontrer que les fonctions f et g ne sont pas continues en $(0, 0)$.

N.B. Nous savons que l'existence de dérivées directionnelles en un point a pour une fonction f , en particulier l'existence de dérivées partielles, n'entraîne pas la différentiabilité en a de f . Mais à présent, nous savons également que l'existence de dérivées directionnelles en un point a pour une fonction f , en particulier l'existence de dérivées partielles, n'entraîne même pas la continuité de f en a !