Auteur : David Blottière [Courriel]
Version : 23 mars 2022, 08h02
Vidéo : [YouTube]

Prérequis
- Espaces vectoriels normés.
- Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- Dérivées directionnelles, en particulier dérivées partielles.
- Définitions et premières propriétés des applications différentiables.

CRITÈRE FONDAMENTAL $\mathscr{C}^1$

RÉSUMÉ.

On énonce, démontre et commente le critère $\mathscr{C}^1$ qui a rôle fondamental dans le calcul différentiel en plusieurs variables. Un des objectifs est de mettre en lumière le rôle clé joué par l'hypothèse de continuité des dérivées partielles.

Table des matières

1 Critère $\mathscr{C}^1$ pour d'une fonction de plusieurs variables

THÉORÈME 1.
Critère $\mathscr{C}^1$ pour d'une fonction de plusieurs variables.

CONTEXTE. On considère
- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers ;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$.

CONCLUSION.

(C) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si

(P1) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la fonction f_j admet une dérivée partielle suivant la variable x_i en tout point de Ω ;

(P2) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la fonction

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \end{array} \right.$$

est continue sur Ω.

2 Démonstration du sens direct du critère $\mathscr{C}^1$

DÉMONSTRATION.
Sens direct du Théorème 1.

Nous notons $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme N_n définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_n(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \,.$$

Nous supposons que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et fixons un entier $j \in [\![1, m]\!]$.

- Nous introduisons l'application

$$\pi_j \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (y_1, \ldots, y_m) & \mapsto & y_j \end{array} \right.$$

  qui est linéaire. Comme les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}$ sont de dimension finie, l'application π_j est continue.
- Nous observons que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\pi_j(f(x_1, \ldots, x_n)) = \pi_j\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big) = f_j(x_1, \ldots, x_n)$$

  et donc $f_j = \pi_j \circ f$.
- Soit $a \in \Omega$. Comme Ω est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset \Omega$.
  La fonction f étant différentiable en a, on dispose d'un DL1 de f en a, i.e. pour $h \in B(0_{\mathbb{R}^n}, r_a)$

$$f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(N_n(h)) \,.$$

  En appliquant l'application π_j, qui est linéaire, à chacun des membres de ce DL1, il vient

$$\pi_j(f(a + h)) = \pi_j(f(a)) + \pi_j\big(\mathrm{d}f(a) \cdot h\big) + \pi_j\left(\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))\right)$$

qui se réécrit
$$f_j(a+h) = f_j(a) + \underbrace{\pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h\right)}_{\text{linéaire en } h} + \pi_j\left(\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))\right).$$
Comme l'application π_j est linéaire et continue
$$\frac{\pi_j\left(\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))\right)}{N_n(h)} = \pi_j\left(\frac{\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))}{N_n(h)}\right) \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} \pi_j(0_{\mathbb{R}^n}) = 0\,.$$
Donc
$$f_j(a+h) = f_j(a) + \underbrace{\pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h\right)}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\mathrm{o}}(N_n(h))\,.$$
Nous en déduisons que la fonction f_j est différentiable en a et que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$
$$\mathrm{d}f_j(a)\cdot h = \pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot h\right).$$

- Soit $a \in \Omega$. D'après la Proposition 20.14, comme f_j est différentiable en a, elle admet des dérivées en a suivant tout vecteur v non nul de $\mathbb{R}^n$ et
$$\mathrm{D}_v f_j(a) = \mathrm{d}f_j(a)\cdot v = \pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot v\right).$$
En particulier, la fonction f_j admet des dérivées partielles suivant les variables $x_1,\dots,x_n$ en a et
$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f_j(a) = \pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot e_i\right).$$
- Soit $i\in[\![1,n]\!]$. L'application ev_{e_i} définie par
$$\mathrm{ev}_{e_i}\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) & \to & \mathbb{R}^m \\ u & \mapsto & u(e_i) \end{array}\right.$$
est linéaire. Comme les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ et $\mathbb{R}^m$ sont de dimension finie, l'application ev_{e_i} est continue. D'après le point précédent l'application $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ est bien définie et est donnée par
$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ \left|\ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \pi_j\left(\mathrm{d}f(a)\cdot e_i\right). \end{array}\right.$$
Donc $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \pi_j\circ \mathrm{ev}_{e_i}\circ \mathrm{d}f$ est continue, comme composée d'applications continues. **QED**

3 L'hypothèse de continuité (P2) du critère $\mathscr{C}^1$ est essentielle

REMARQUE 2.
L'hypothèse de continuité des dérivées partielles (P2) est essentielle dans le Théorème 1.

CONTEXTE. On considère

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$.

ÉNONCÉ.

Si la fonction f vérifie uniquement la condition

(P1) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la fonction f_j admet une dérivée partielle suivant la variable x_i en tout point de Ω

alors la fonction f n'est pas nécessairement différentiable sur Ω. Cf. Lemme 3 ci-après.

LEMME 3.
Une fonction possédant des dérivées partielles en $(0,0)$, mais non différentiable en $(0,0)$.

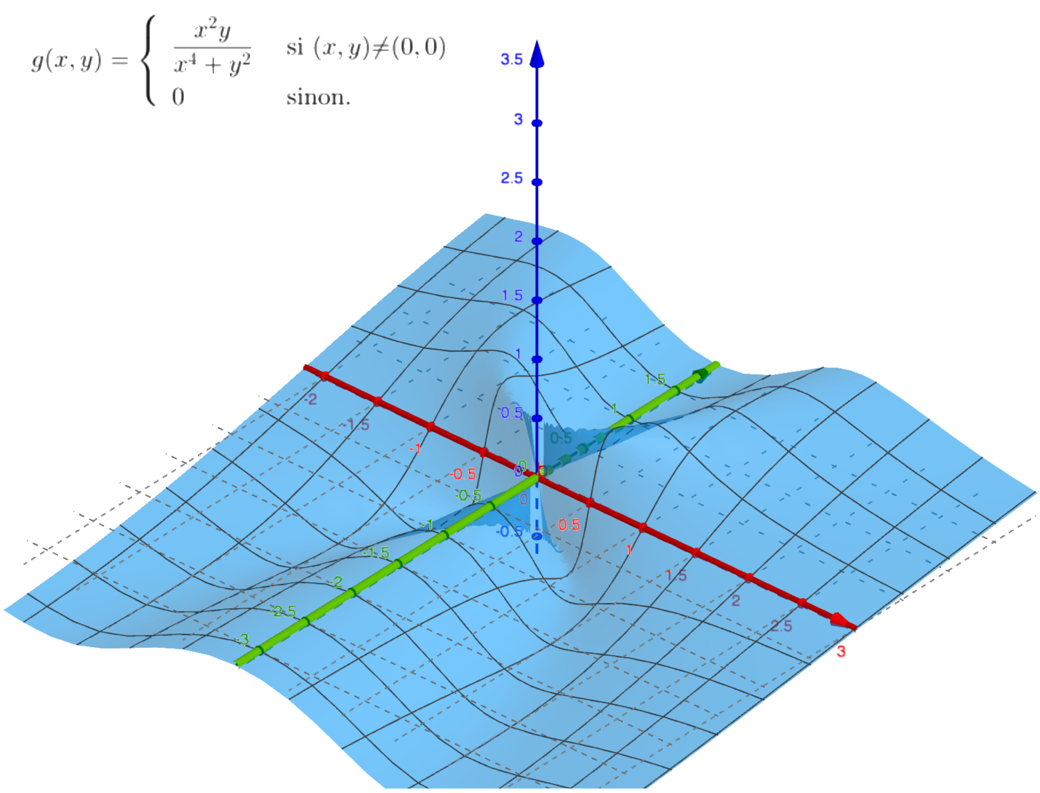
CONTEXTE. On considère

- l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

CONCLUSION.

(C) L'application g admet des dérivées en $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^2$ (donc *a fortiori* des dérivées partielles en $(0,0)$), mais n'est pas continue en $(0,0)$ (donc *a fortiori* non différentiable en $(0,0)$).

GRAPHE DE LA FONCTION g DU LEMME 3 [Geogebra3D]



Démonstration.
Lemme 3.

- Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{g(tv_1, tv_2) - g(0,0)}{t} = \frac{t^3\, v_1^2 v_2}{t^2\,(t^2 v_1^4 + v_2^2)} = \begin{cases} \dfrac{t\, v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ si } v_2 \neq 0 \\ 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ si } v_2 = 0 \text{ (et } v_1 \neq 0) . \end{cases}$$

Donc l'application g est dérivable en $(0,0)$ suivant v et $\mathrm{D}_v g(0,0) = 0$.

- On observe

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0) .$$

L'application g n'est donc pas continue en $(0,0)$. **QED**

4 Dérivée partielle comme dérivée d'une fonction d'une variable réelle

Rappel 4.
Dérivée partielle comme dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

Contexte. On considère

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers ;
- $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$;
- i un nombre entier dans $[\![1, n]\!]$;
- a un ouvert de Ω.

Énoncé.

- La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe si

$$\begin{aligned} & f \text{ admet une dérivée en } a = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \text{ suivant le vecteur } e_i \\ :\iff\quad & \exists \ell \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} \ell \\ \iff\quad & \exists \ell \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{t} \xrightarrow[t\to 0_{\mathbb{R}}]{} \ell \\ \iff:\quad & \text{la fonction } f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \ldots, a_n) : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ & \text{d'une variable réelle est dérivable en } a_i. \end{aligned}$$

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe, alors on pose

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t\to 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \ldots, a_n)'(a_i) .$$

EXEMPLE 5.
Dérivée partielle d'une fonction de deux variables à valeurs réelles.

CONTEXTE. On considère

- $\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$;
- la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \cos(x_1 x_2)$;
- un point $a \in \mathbb{R}^2$.

ÉNONCÉ.

On s'intéresse à la dérivée partielle de f en $a = (a_1, a_2)$ par rapport à x_1.

- On observe

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+te_1)-f(a)}{t} &= \frac{f(a_1+t, a_2)-f(a_1,a_2)}{t}\\
&= \frac{\cos((a_1+t)a_2)-\cos(a_1a_2)}{t}\\
&= \frac{\cos(a_1a_2+ta_2)-\cos(a_1a_2)}{t}\\
&= \frac{\cos(a_1a_2)\cos(ta_2)-\sin(a_1a_2)\sin(ta_2)-\cos(a_1a_2)}{t}\\
&\underset{t\to 0_{\mathbb{R}}}{=} \frac{1}{t}\left(\cos(a_1a_2)\,(1+o(t))-\sin(a_1a_2)\,(ta_2+o(t))-\cos(a_1a_2)\right)\\
&\underset{t\to 0_{\mathbb{R}}}{=} \cos(a_1a_2)\,o(1)-a_2\sin(a_1a_2)-\sin(a_1a_2)\,o(1)\\
&\underset{t\to 0_{\mathbb{R}}}{\longrightarrow} -a_2\sin(a_1a_2)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } a \text{ par rapport à } x_1 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = -a_2\sin(a_1a_2).}$

- La fonction

$$f(\bullet, a_2) \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x_1 & \mapsto & f(x_1, a_2) \end{array}\right.$$

est dérivable (composée d'une fonction affine par cos) et une dérivée donnée par

$$\forall\, x_1 \in \mathbb{R}, \quad f(\bullet, a_2)'(x_1) = -a_2\sin(x_1a_2)\,.$$

En particulier, $\boxed{\text{la fonction } f(\bullet, a_2) \text{ est dérivable en } a_1 \text{ et } f(\bullet, a_2)'(a_1) = -a_2\sin(a_1a_2).}$

- Les résultats des deux points précédents sont en accord avec le Rappel 4 et on observe que la deuxième voie parait plus efficace que la première.

5 Continuité des dérivées partielles et expression intégrale

LEMME 6.
Accroissement en une variable pour une fonction à dérivée partielle continue.

CONTEXTE. On considère

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers ;
- la norme $N_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ sur $\mathbb{R}^n$;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$;
- i un nombre entier dans $[\![1, n]\!]$;
- $a = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ un point de Ω ;
- $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset \Omega$.

HYPOTHÈSE(S). On suppose

(H1) la fonction f admet une dérivée partielle suivant la variable x_i en tout point de Ω ;

(H2) la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array} \right.$$

est continue sur Ω.

CONCLUSION.

(C) Pour tout $h_i \in \mathbb{R}$ tel que $|h_i| < r_a$

$$\begin{aligned} & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ = \; & \int_{a_i}^{a_i + h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \, \mathrm{d}x_i \, . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.
Lemme 6.

- Pour tout $t \in [a, a + h_i]$ ou $[a + h_i, a]$

$$N_n\left((a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\right) = |t| \leq |h_i| < r_a$$

  et donc $(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in B(a, r_a) \subset \Omega$.
- La fonction

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \ldots, a_n) \left| \begin{array}{ccc} [a, a + h_i] \text{ ou } [a + h_i, a] & \to & \mathbb{R}^m \\ x_i & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

  est donc bien définie.
- D'après le Rappel 4 et les hypothèses (H1) et (H2), elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, a + h_i]$ ou $[a + h_i, a]$ et de plus, pour tout $x_i \in [a, a + h_i]$ ou $[a + h_i, a]$

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \ldots, a_n)'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \, .$$

- D'après le Théorème fondamental de l'analyse

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_i+h_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)\,\mathrm{d}x_i &= \int_{a_i}^{a_i+h_i} f(a_1,\dots,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},\dots,a_n)'(x_i)\,\mathrm{d}x_i \\ &= f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h_i,a_{i+1},\dots,a_n) \\ &- \\ & \quad f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)\,.\end{aligned}$$

QED

LEMME 7.
Accroissement en deux variables pour une fonction à dérivées partielles continues.

CONTEXTE. On considère

- la norme $N_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$; $(x_1,x_2) \mapsto \max(|x_1|,|x_2|)$ sur $\mathbb{R}^2$;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $a = (a_1,a_2)$ un point de Ω ;
- $r_a > 0$ tel que $B(a,r_a) \subset \Omega$.

HYPOTHÈSE(S). On suppose

(H1) la fonction f admet une dérivée partielle suivant les variables x_1 et x_2 en tout point de Ω ;
(H2) pour tout $i \in [\![1,2]\!]$, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}\right.$$

est continue sur Ω.

CONCLUSION.

(C) Pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_2(h_1,h_2) < r_a$

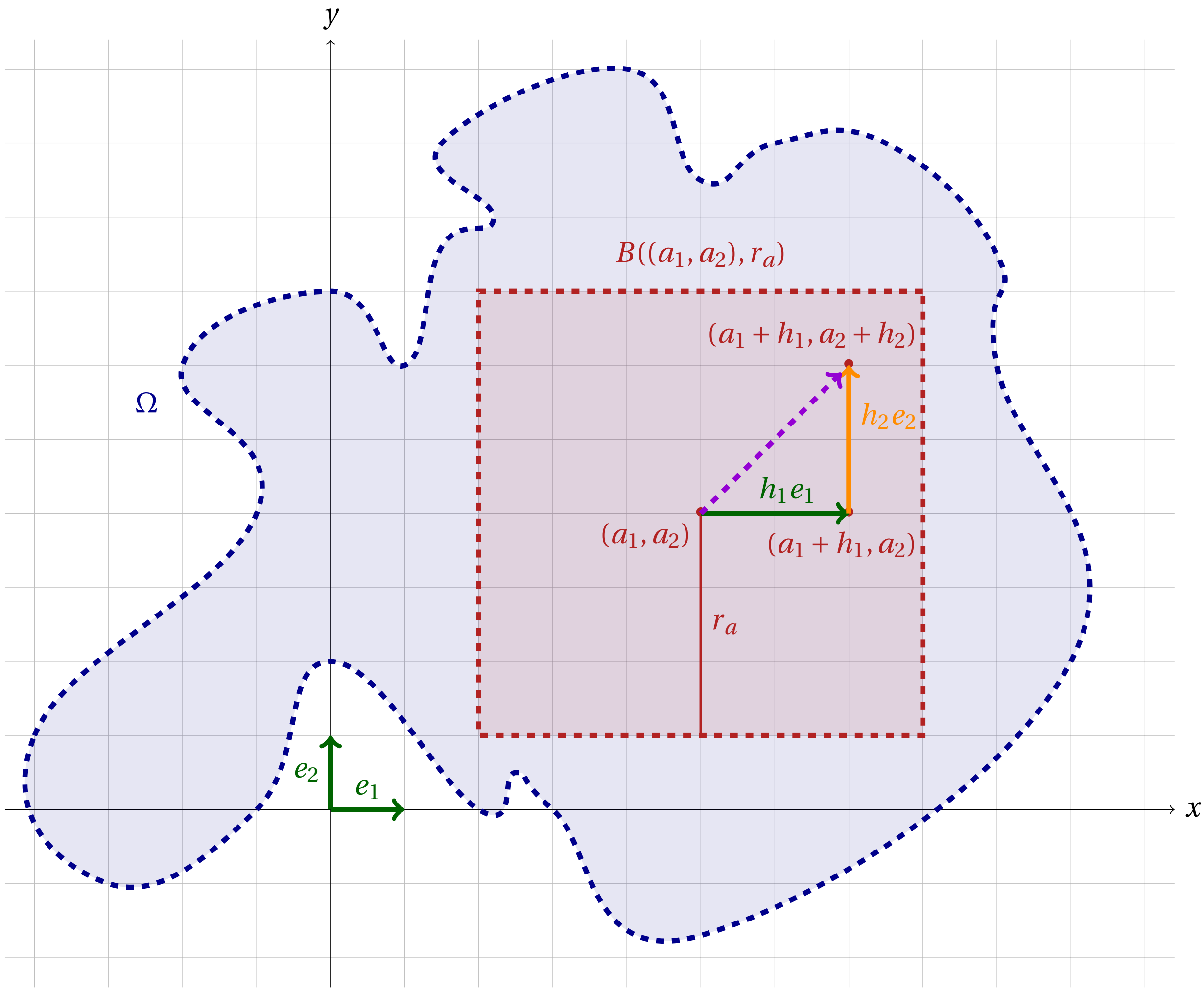
$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) = \int_{a_1}^{a_1+h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2)\,\mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

DÉMONSTRATION.
Lemme 7.

- On considère le cas où $h_1 \geq 0$ et $h_2 \geq 0$, pour éviter d'avoir à distinguer plusieurs types de segments.
- Comme $N_2(h_1,h_2) < r_a$, il vient

$$|h_1| < r_a \quad \text{et} \quad |h_2| < r_a\,.$$

- Pour évaluer l'accroissement de f entre les points (a_1+h_1,a_2+h_2) et (a_1,a_2), on introduit un point intermédiaire, le point (a_1+h_1,a_2).



- On écrit donc

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2) \quad = \quad f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)+f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)$$

D'après le Lemme 6

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)=\int_{a_2}^{a_2+h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

$$f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)=\int_{a_1}^{a_1+h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2)\,\mathrm{d}x_1$$

Ainsi

$$\boxed{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\int_{a_1}^{a_1+h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2)\,\mathrm{d}x_1+\int_{a_2}^{a_2+h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2}$$

QED

6 Démonstration du sens réciproque du critère $\mathscr{C}^1$ dans un cas particulier

Nous allons démontré le sens réciproque du critère $\mathscr{C}^1$, dans le cas d'une fonction de deux variables à valeurs réelles. Le résultat convoité est précisément énoncé dans la Proposition 8 ci-dessous.

PROPOSITION 8.
Sens réciproque du critère $\mathscr{C}^1$ dans un cas particulier.

CONTEXTE. On considère

- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$;

HYPOTHÈSE(S). On suppose

(H1) la fonction f admet une dérivée partielle suivant les variables x_1 et x_2 en tout point de Ω;
(H2) pour tout $i \in [\![1,2]\!]$, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array} \right.$$

est continue sur Ω.

CONCLUSION.

(C1) La fonction f est différentiable sur Ω.
(C2) Pour tout $a \in \Omega$, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{d}f(a) \cdot (h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) .$$

DÉMONSTRATION.
Proposition 8.

Considérons la norme $N_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \,;\, (x_1, x_2) \mapsto \max(|x_1|, |x_2|)$ sur $\mathbb{R}^2$ et fixons $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. Nous supposerons toujours dans la suite, pour alléger quelque peu la démonstration sans la dénaturer pour autant, que tous les h_1 et h_2 qui apparaissent ci-dessous sont des réels strictement positifs.

- Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset \Omega$. Soit $(h_1, h_2) \in B((0,0), r_a)$. Comme $N_2(h_1, h_2) < r_a$, il vient

$$|h_1| < r_a \quad \text{et} \quad |h_2| < r_a$$

  et donc $(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \in B(a, r_a) \subset \Omega$. L'assertion à démontrer équivaut à

$$\underbrace{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}_{=:\varphi(h_1,h_2)} = \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}} (N_2(h_1, h_2))$$

  où $(h_1, h_2) \in B((0,0), r_a)$.
- Soit $(h_1, h_2) \in B((0,0), r_a)$. D'après le Lemme 7

$$\varphi(h_1, h_2) = \int_{a_1}^{a_1+h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2)\, \mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2 - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) .$$

Comme

$$h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \int_{a_1}^{a_1+h_1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)}_{\text{constante}} \mathrm{d}x_1 \quad \text{et} \quad h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) = \int_{a_2}^{a_2+h_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)}_{\text{constante}} \mathrm{d}x_2$$

il vient

$$\varphi(h_1,h_2) = \int_{a_1}^{a_1+h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right) \mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right) \mathrm{d}x_2$$

et donc

$$\left|\varphi(h_1,h_2)\right| \le \int_{a_1}^{a_1+h_1} \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right| \mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right| \mathrm{d}x_2\,.$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des dérivées partielles de f en $a = (a_1,a_2)$, cf. (H2), il existe $0 < \rho_{a,1} < r_a$ et $0 < \rho_{a,2} < r_a$

$$\forall\,(x_1,x_2) \in B(a,\rho_{a,1}), \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\,(x_1,x_2) \in B(a,\rho_{a,2}), \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Donc, si on pose $\rho_a := \min\left(\rho_{a,1},\rho_{a,2}\right)$, d'après la dernière inégalité du point précédent, on déduit que pour tout pour tout $(h_1,h_2) \in B(a,\rho_a)$

$$\left|\varphi(h_1,h_2)\right| \le \int_{a_1}^{a_1+h_1} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x_1 + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x_2 = h_1\frac{\varepsilon}{2} + h_2\frac{\varepsilon}{2} \le N_2(h_1,h_2)\frac{\varepsilon}{2} + N_2(h_1,h_2)\frac{\varepsilon}{2} = N_2(h_1,h_2)\,\varepsilon\,.$$

- Nous avons donc démontré

$$\boxed{\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists \rho_a > 0, \quad \forall\,(h_1,h_2) \in B(a,\rho_a) \subset \Omega, \quad \left|\frac{\varphi(h_1,h_2)}{N_2(h_1,h_2)}\right| \le \varepsilon}$$

ce qui est la signification formelle de l'assertion $\varphi(h_1,h_2) = \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(N_2(h_1,h_2))$.

QED

7 Un outil puissant pour établir la différentiabilité et calculer des différentielles

Le critère $\mathscr{C}^1$ discuté dans ce texte et la Proposition 20.24 du Chapitre 20 « Calcul différentiel » entrainent la Proposition 9 suivante, qui est un outil fort pratique pour le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables.

PROPOSITION 9.
Étude pratique des propriétés différentielles des fonctions de plusieurs variables.

CONTEXTE. On considère

- $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers ;
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)$.

HYPOTHÈSE(S). On suppose

(H1) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la fonction f_j admet une dérivée partielle suivant la variable x_i en tout point de Ω ;

(H2) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, la fonction

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \end{array} \right.$$

est continue sur Ω.

CONCLUSION.

(C1) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

(C2) Pour tout $a \in \Omega$, la matrice de l'application $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans les bases canoniques $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n, \mathscr{B}_m}(\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice Jacobienne de } f \text{ en } a\text{).}$$