TP n°5

Résolution approchée d'une équation numérique par dichotomie

Contexte

- a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ (ce qui s'interprète en disant que l'on peut tracer la courbe de f sans lever le crayon).
- Les valeurs de f en a et en b sont de signes opposés, i.e. $f(a)f(b) \leq 0$.

Problématique

Dans le contexte précédent, le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation

$$(\star) \qquad f(x) = 0$$

d'inconnue $x \in [a, b]$ possède (au moins) une solution. La question que l'on pose est la suivante. Comment trouver une valeur approchée d'une solution de $(\star)$ avec une précision arbitrairement « petite » $\varepsilon > 0$ donnée ?

Résolution du problème posé par dichotomie [1]

Pour résoudre le problème posé, on va construire une suite d'intervalles $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. $[a_n, b_n]$ contient une solution de $(\star)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. la longueur $b_n - a_n$ de l'intervalle $[a_n, b_n]$ est égale à $\frac{b-a}{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une telle suite nous permet de résoudre le problème posé, comme on l'explique ci-dessous.

Soit un entier naturel n fixé. Soit x_n une solution de l'équation $(\star)$ dans l'intervalle $[a_n, b_n]$ (un tel x_n existe d'après 1., mais nous n'en connaissons pas d'explicite *a priori* et c'est là notre problème). Alors

$$|x_n - a_n| = x_n - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

la dernière égalité découlant de 2.. Donc a_n livre une valeur approchée d'une solution de l'équation $(\star)$ avec une erreur inférieure ou égale à $\frac{b-a}{2^n}$.

Remarque : Nous aurions en fait pu prendre un nombre arbitrairement choisi dans $[a_n, b_n]$, plutôt que a_n, pour avoir une valeur approchée d'une solution de l'équation $(\star)$ avec une erreur inférieure ou égale à $\frac{b-a}{2^n}$.

Quitte à prendre n suffisamment grand, on a $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$, puisque $\frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour un tel n, la valeur de a_n fournit donc une valeur approchée d'une solution de l'équation $(\star)$, telle que l'erreur commise soit inférieure ou égale à ε.

Après avoir expliqué qu'une suite d'intervalles $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés 1. et 2. répond à notre problématique, il reste à en construire une. On peut procéder « de proche en proche », comme suit, pour cela.

1. Vient du grec : « couper en deux ».

- *Étape 0*

  On pose $a_0 := a$ et $b_0 := b$. D'après ces définitions et les hypothèses (cf. contexte), on a

  1. $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ et donc l'équation $(\star)$ possède une solution dans $[a_0, b_0]$ (cf. théorème des valeurs intermédiaires) ;
  2. $b_0 - a_0 = b - a$.

- *Étape 1*

  On introduit le milieu c_0 du segment $[a_0, b_0]$ et on pose

  $$\left| \begin{array}{l} a_1 := a_0 \text{ et } b_1 := c_0 \text{ si } f(a_0)f(c_0) \leq 0 \\ a_1 := c_0 \text{ et } b_1 := b_0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

  Alors quelque que soit le cas

  1. $f(a_1)f(b_1) \leq 0$ et donc l'équation $(\star)$ possède une solution dans $[a_1, b_1]$ (cf. théorème des valeurs intermédiaires) ;
  2. $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b-a}{2}$.

  Pourquoi ?

- *Étape 2*

  On introduit le milieu c_1 du segment $[a_1, b_1]$ et on pose

  $$\left| \begin{array}{l} a_2 := a_1 \text{ et } b_2 := c_1 \text{ si } f(a_1)f(c_1) \leq 0 \\ a_2 := c_1 \text{ et } b_2 := b_1 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

  Alors quelque que soit le cas

  1. $f(a_2)f(b_2) \leq 0$ et donc l'équation $(\star)$ possède une solution dans $[a_2, b_2]$ (cf. théorème des valeurs intermédiaires) ;
  2. $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$.

  Pourquoi ?

$$\vdots$$

- *Étape n*

  On suppose construit un intervalle $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ tel que

  1. $f(a_{n-1})f(b_{n-1}) \leq 0$;
  2. $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.

  On introduit le milieu c_{n-1} du segment $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ et on pose

  $$\left| \begin{array}{l} a_n := a_{n-1} \text{ et } b_n := c_{n-1} \text{ si } f(a_{n-1})f(c_{n-1}) \leq 0 \\ a_n := c_{n-1} \text{ et } b_n := b_{n-1} \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

  Alors quelque que soit le cas

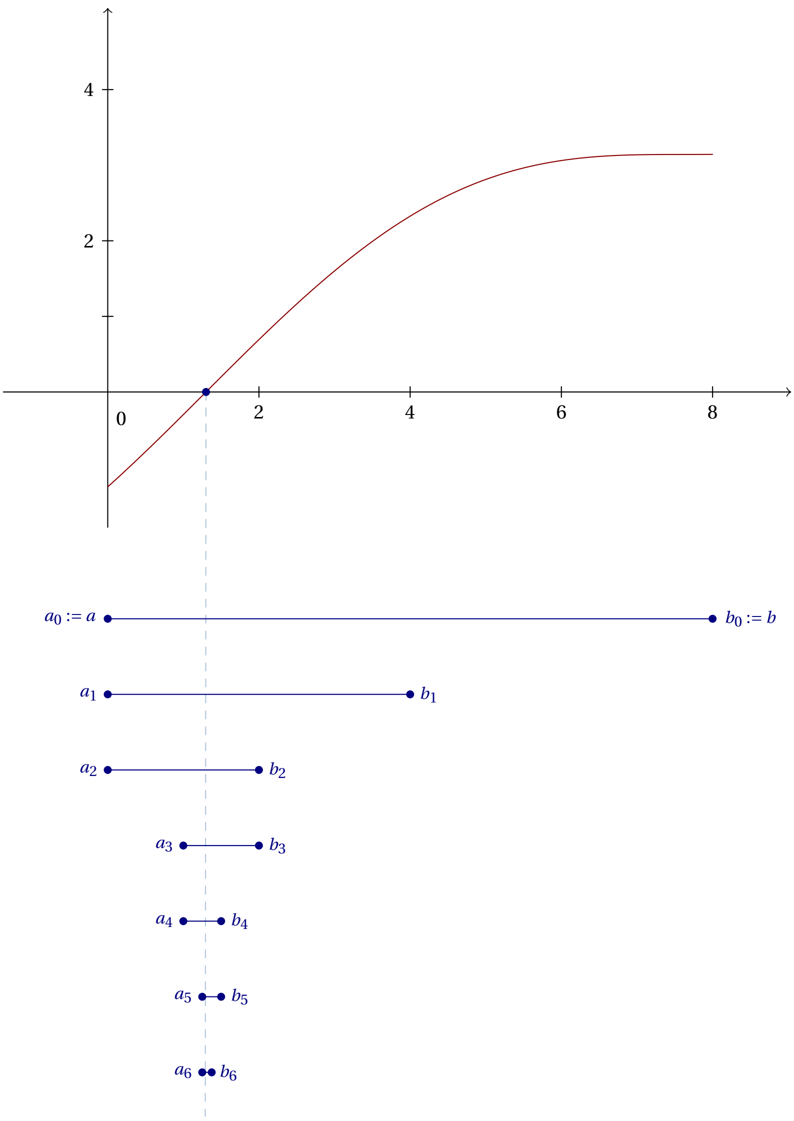
  1. $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ et donc l'équation $(\star)$ possède une solution dans $[a_n, b_n]$ (cf. théorème des valeurs intermédiaires) ;
  2. $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$.

  Pourquoi ?

$$\vdots$$

N.B. : Répondre à chacun des « Pourquoi ? » n'est pas optionnel ! C'est le cœur de l'algorithme qui est caché dans ces questions. Une fois apportée une réponse au premier, les réponses aux autres sont analogues.

La figure ci-dessous donne une idée de la mise en œuvre de la construction décrite ci-dessus.



Exercice 1
Écrire un programme qui affiche une valeur approchée de la[2] solution de l'équation

$$x = \cos(x)$$

d'inconnue $x \in [0, \pi]$, avec une erreur inférieure ou égale à 10^{-5}, en implémentant l'algorithme de dichotomie exposé précédemment.

Exercice 2
L'équation

$$(E) \ : \ x^2 - 6x + 5 = 0$$

possède deux solutions dans $\mathbb{R}$: 2 et 3.

2. Le théorème des valeurs intermédiaires, judicieusement appliqué, nous assure qu'il existe au moins une solution. Ici, on peut démontrer l'unicité de la solution. Comment ?

1. Que se passe-t-il si l'on adapte le programme de l'exercice 1 à cette équation, en partant de l'intervalle $[1,3]$? On regardera en particulier le nombre d'itérations.
2. Améliorer le programme précédent, pour corriger le problème décelé à la question 1.