TP n°18

Représentations graphiques de suites récurrentes

1 Synthèse sur certaines suites récurrentes

1.1 Le contexte

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle. Nous supposons qu'il existe des réels $a < b$ tels que :
(C1) $[a,b] \subset \mathscr{D}_f$;
(C2) f est monotone sur $[a,b]$;
(C3) $[a,b]$ est stable par f, i.e. pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$;
(C4) f est continue sur $[a,b]$.
Notons que si (C1) et (C2) sont satisfaites, alors (C3) équivaut à $(f(a), f(b)) \in [a,b]^2$.

Nous fixons un repère du plan et nous notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et Δ la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Caractère bien défini et caractère borné

Il est aisé de démontrer, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, minorée par a et majorée par b.

1.3 Du sens de variation

- Si la fonction f est croissante sur $[a,b]$, alors nous pouvons démontrer, à nouveau par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante : l'ordre entre u_0 et $u_1 = f(u_0)$, ou ce qui revient au même, la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ au dessus du point d'abscisse x_0, détermine le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si la fonction f est décroissante sur $[a,b]$, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Pour le démontrer, nous pouvons utiliser les mêmes arguments que dans le cas précédent (cf. cas où f est croissante sur $[a,b]$), en remarquant que ces deux suites vérifient les relations de récurrence :

$$u_{2(n+1)} = f(f(u_{2n})) \qquad \text{et} \qquad u_{2(n+1)+1} = f(f(u_{2n+1}))$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre les sens de variation des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont opposés. En effet :

$$u_0 \leq u_2 \Longrightarrow u_1 = f(u_0) \geq f(u_2) = u_3 \qquad \text{et} \qquad u_0 \geq u_2 \Longrightarrow u_1 = f(u_0) \leq f(u_2) = u_3.$$

1.4 Du comportement asymptotique

- Si la fonction f est croissante sur $[a,b]$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et monotone. Par suite elle converge. Notons ℓ sa limite. De :

$$a \leq u_n \leq b$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous déduisons $a \leq \ell \leq b$, par passage à la limite dans une inégalité. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est continue en l, d'où $f(u_n) \to f(\ell)$. En passant à la limite dans l'égalité :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient alors :

$$\ell = f(\ell).$$

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un point fixe de la fonction f dans $[a,b]$, ou ce qui revient au même, une abscisse d'un point de contact entre $\mathscr{C}_f$ et Δ au dessus de $[a,b]$.

- Si la fonction f est décroissante sur $[a,b]$, alors :
  — les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est ;
  — les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
  Par suite, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. En reprenant essentiellement les arguments invoqués précédemment, dans le cas où f est croissante sur $[a,b]$, nous pouvons alors démontrer que les limites des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont nécessairement des solutions de l'équation

$$(\star) \qquad f(f(x)) = x$$

  d'inconnue $x \in [a,b]$. Ainsi, de deux choses l'une :
  — soit $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1}$ (condition réalisée par exemple si $(\star)$ ne possède qu'une solution), auquel cas la suite (u_n) converge et $\lim u_n = \lim u_{2n} = \lim u_{2n+1}$
  — soit $\lim u_{2n} \neq \lim u_{2n+1}$, auquel cas la suite (u_n) n'admet ni limite finie, ni limite infinie.

1.5 Un mode de représentation graphique

Nous notons D le point de coordonnées $(u_0, 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons ensuite :

$$\begin{array}{lcl} A_n & : & \text{le point de coordonnées } (u_{n-1}, u_n); \\ B_n & : & \text{le point de coordonnées } (u_n, u_n). \end{array}$$

Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- Si la fonction f est croissante sur $[a,b]$, nous appelons « courbe en escalier » représentant les $(N+1)$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la ligne brisée joignant les points :

$$D, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots, A_N, B_N$$

  dans cet ordre.
- Si la fonction f est décroissante sur $[a,b]$, nous appelons « courbe en escargot » représentant les $(N+1)$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la ligne brisée joignant les points :

$$D, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots, A_N, B_N$$

  dans cet ordre.

2 Exercices

Exercice 1 : On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant aux données :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad a = 0 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad u_0 = \frac{1}{10}.$$

Tracer dans une même fenêtre graphique la courbe de f, la droite Δ au dessus de $[a,b]$, ainsi que la « courbe en escalier » représentant les 20 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis émettre une conjecture.

Exercice 2 : On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant aux données :

$$f : x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{1}{x} \quad ; \quad a = \frac{1}{2} \quad ; \quad b = 3 \quad ; \quad u_0 = \frac{5}{2}.$$

Tracer dans une même fenêtre graphique la courbe de f et la droite Δ au dessus de $[a,b]$, ainsi que la « courbe en escargot » représentant les 20 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis émettre une conjecture.

Exercice 3 : On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant aux données :

$$f : x \mapsto x^2 - 1 \quad ; \quad a = -1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad u_0 = -\frac{1}{2}.$$

Tracer dans une même fenêtre graphique la courbe de f, la courbe de $x \mapsto f(f(x))$ et la droite Δ au dessus de $[a,b]$, ainsi que la « courbe en escargot » représentant les 20 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis émettre une conjecture.