TP n°13

Matrices (suite)

Exercice 1 (Matrice échelonnée)
Écrire une fonction `echelonnee`
- d'argument `A` une matrice ;
- qui retourne `True` si `A` est une matrice est échelonnée, et `False` sinon.

Exercice 2 (Rang d'une matrice échelonnée)
Écrire une fonction `rang_echelonnee`
- d'argument `A` une matrice ;
- qui retourne le rang de `A` si la matrice `A` est échelonnée et `-1` sinon.

Exercice 3 (Matrice échelonnée réduite)
Écrire une fonction `echelonnee_reduite`
- d'argument `A` une matrice ;
- qui retourne `True` si `A` est une matrice est échelonnée réduite, et `False` sinon.

Exercice 4 (Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices 2×2 à coefficients réels)
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on définit son déterminant par

$$\det(A) := [A]_{11}[A]_{22} - [A]_{12}[A]_{21}$$

et sa trace par

$$\operatorname{tr}(A) := [A]_{11} + [A]_{22}.$$

1. Écrire une fonction `polynome_caracteristique_en_la_matrice`
   - d'argument `A` une matrice ;
   - qui retourne la matrice
   $$\mathtt{A}^2 - \operatorname{tr}(\mathtt{A}).\mathtt{A} + \det(\mathtt{A}).\mathtt{I}_2\,.$$
2. Utiliser la fonction `polynome_caracteristique_en_la_matrice` pour conjecturer la valeur de
   $$A^2 - \operatorname{tr}(A).A + \det(A).I_2$$
   où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Démontrer la conjecture énoncée en 2.
4. Déduire de la question 3 une preuve alternative du résultat
   $$\forall\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad A \in GL_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$$
   étudié dans l'exercice 124 de la feuille d'exercices n°14 de mathématiques.