Lycée Benjamin Franklin
D. Blottière, B. Mollier

TP n°10

Calculs de valeurs approchées d'intégrales

Télécharger le fichier support du TP (cf. code ci-dessous) à l'adresse

`http://www.dblottiere.org/index.php?rep=ptsi/ipt`

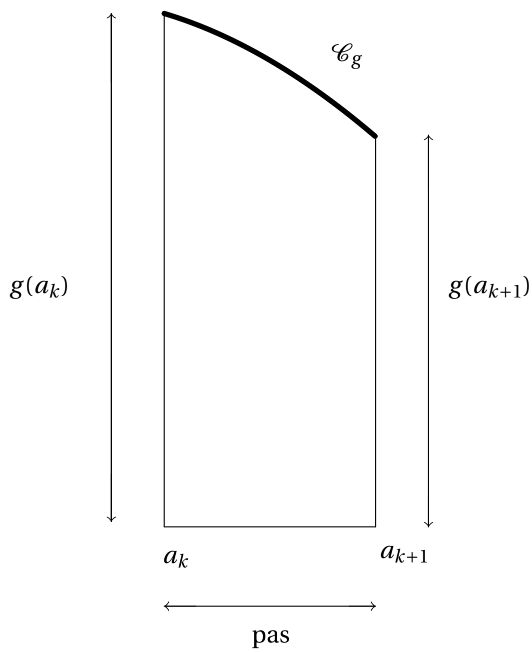
puis sauvegarder le dans un répertoire spécialement créé pour cette séance. *Ne l'exécuter pas pour le moment.*

```
"""
    Fichier support du TP n°10
    Calculs de valeurs approchées d'intégrales par la méthode des rectangles à gauche
"""

#------------------------------
# Chargement des bibliothèques
#------------------------------
import math
import numpy as np
import time # Pour mesurer les temps d'exécution

#----------------------------------------------------------------------------------------------------
# Calcul de intégrale de a à b de la fonction f avec la méthode des rectangles à gauche avec N points
#----------------------------------------------------------------------------------------------------
def methode_rectangle_gauche(f,a,b,N):

    subdiv=np.linspace(a,b,N) # Création de la subdivision (régulière) de [a,b] à N points
    pas=(b-a)/(N-1) # Valeur de la distance entre 2 points quelconques de la subdivision (pas)
    resultat=0 # Variable permettant le calcul de proche en proche de la valeur approchée

    for k in range(N-1): # On parcourt de toutes les points (utiles) de la subdivision
        aire_k_ieme_rectangle=pas*f(subdiv[k]) # On prend les rectangles "à gauche"
        resultat=resultat+aire_k_ieme_rectangle

    return(resultat)

#------------------------------------------------------------------------------
# On définit la fonction gaussienne pour appliquer la fonction methode_rectangle
#------------------------------------------------------------------------------
def g(x):
    return(math.exp(-x**2/2))

#--------------------------------------------------------------
# Valeur approchée de de référence de l'intégrale de 0 à 1 de g
#--------------------------------------------------------------
val_app_ref=0.85562439189214880315 # Valeur approchée de référence
print("Valeur approchée de référence:",val_app_ref)

#--------------------------------------------------------------
# Calcul approchée de intégrale de 0 à 1 de g, avec 10^2 points
#--------------------------------------------------------------
avant=time.time() # Temps avant le calcul
val_app=methode_rectangle_gauche(g,0,1,10**2) # Calcul de la valeur approchée de l'intégrale
apres=time.time() # Temps après le calcul
temps=apres-avant # Temps du calcul
erreur_estimee=abs(val_app-val_app_ref) # Comparaison à la valeur de référence
print("Rectangles à gauche (10**2 points):", val_app,", erreur estimée:",erreur_estimee,", temps:",temps)

#--------------------------------------------------------------
# Calcul approchée de intégrale de 0 à 1 de g, avec 10^4 points
#--------------------------------------------------------------
avant=time.time() # Temps avant le calcul
val_app=methode_rectangle_gauche(g,0,1,10**4) # Calcul de la valeur approchée de l'intégrale
apres=time.time() # Temps après le calcul
temps=apres-avant # Temps du calcul
erreur_estimee=abs(val_app-val_app_ref) # Comparaison à la valeur de référence
print("Rectangles à gauche (10**4 points):", val_app,", erreur estimée:",erreur_estimee,", temps:",temps)

#--------------------------------------------------------------
# Calcul approchée de intégrale de 0 à 1 de g, avec 10^6 points
#--------------------------------------------------------------
avant=time.time() # Temps avant le calcul
val_app=methode_rectangle_gauche(g,0,1,10**6) # Calcul de la valeur approchée de l'intégrale
apres=time.time() # Temps après le calcul
temps=apres-avant # Temps du calcul
erreur_estimee=abs(val_app-val_app_ref) # Comparaison à la valeur de référence
print("Rectangles à gauche (10**6 points):", val_app,", erreur estimée:",erreur_estimee,", temps:",temps)
```

Question 1 (Méthode des rectangles à gauche)
Lire le code téléchargé, en essayant de le comprendre ligne-à-ligne, puis répondre aux questions suivantes.

1. Dans la fonction `methode_rectangle_gauche`, pourquoi divise-t-on par `N-1` et non par `N` dans le calcul du pas ?

2. Nous notons $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_N$ les N points de la subdivision régulière de $[0,1]$ à N pas et nous fixons $k \in [\![1, N-1]\!]$. Dans la méthode des rectangles à gauche, nous approximons l'aire exacte sous la courbe $\mathscr{C}_g$ au-dessus de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ par une aire « facile à calculer ». Représenter cette dernière sur la figure ci-dessous, puis entourer la ligne de code où l'on calcule cette aire dans le programme de la page précédente.

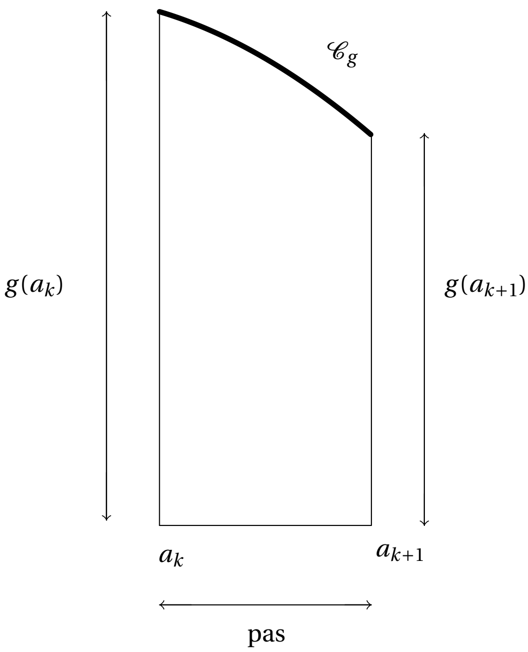


3. Pourquoi obtenons-nous des valeurs approchées de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ toujours supérieures à la valeur exacte par cette méthode, dans notre exemple ?

4. Expliquer le rôle des appels de la fonction `time.time()` dans les tests de la fonction `methode_rectangle_gauche`.

Question 2 (Méthode des rectangles à droite)

1. Nous conservons les notations du 2 de la question 1. Représenter ci-dessous l'aire « facile à calculer » par laquelle nous remplaçons l'aire exacte sous la courbe $\mathscr{C}_g$ au-dessus de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ dans la méthode des rectangles à droite.



2. Que pouvons-nous prédire quant aux valeurs approchées de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ que nous obtenons par la méthode des rectangles à droite, dans notre exemple ?

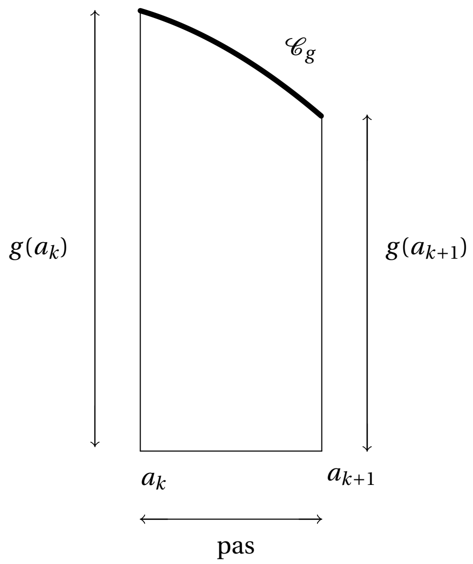
3. S'appuyer sur le fichier support pour construire une fonction nommée `methode_rectangle_droite` qui calcule une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles à droite.

4. Faire plusieurs appels de la fonction `methode_rectangle_droite`, comme dans le fichier support, en précisant l'erreur commise et le temps de calcul.

5. Y-a-t-il une différence significative entre la méthode des rectangles à gauche et la méthode des rectangles à droite, dans notre exemple ?

Question 3 (Méthode des rectangles au milieu)

1. Nous conservons les notations du 2 de la question 1. Représenter ci-dessous l'aire « facile à calculer » par laquelle nous remplaçons l'aire exacte sous la courbe $\mathscr{C}_g$ au dessus-de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ dans la méthode des rectangles au milieu.



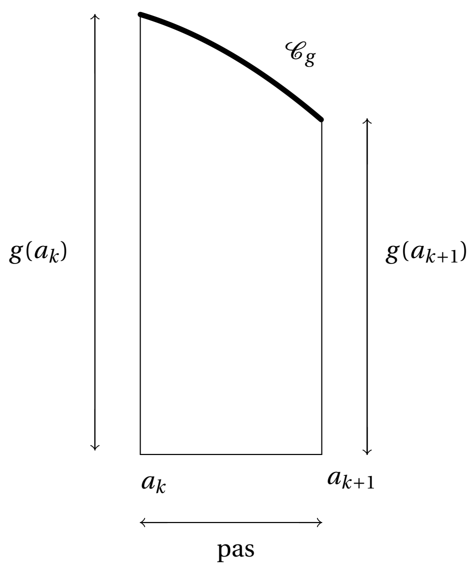
2. S'appuyer sur le fichier support pour construire une fonction nommée `methode_rectangle_milieu` qui calcule une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles au milieu.

3. Faire plusieurs appels de la fonction `methode_rectangle_milieu`, comme dans le fichier support, en précisant l'erreur commise et le temps de calcul.

4. Y-a-t-il une différence significative entre la méthode des rectangles au milieu et les deux autres méthodes implémentées auparavant, dans notre exemple ?

Question 4 (Méthode des trapèzes)

1. Nous conservons les notations du 2 de la question 1. Représenter ci-dessous l'aire « facile à calculer » par laquelle nous remplaçons l'aire exacte sous la courbe $\mathscr{C}_g$ au dessus-de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ dans la méthode des trapèzes.



2. S'appuyer sur le fichier support pour construire une fonction nommée `methode_trapeze` qui calcule une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

3. Faire plusieurs appels de la fonction `methode_trapeze`, comme dans le fichier support, en précisant l'erreur commise et le temps de calcul.

4. Y-a-t-il une différence significative entre la méthode des trapèzes et les trois méthodes des rectangles rencontrées auparavant, dans notre exemple ?

Question 5 (Méthode de Simpson)

1. Par quelle aire « facile à calculer » remplaçons-nous l'aire exacte sous la courbe de $\mathscr{C}_g$ au dessus-de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ dans la méthode de Simpson ?

2. S'appuyer sur le fichier support pour construire une fonction nommée `methode_Simpson` qui calcule une valeur approchée d'une intégrale par la méthode de Simpson.

3. Faire plusieurs appels de la fonction `methode_Simpson`, comme dans le fichier support, en précisant l'erreur commise et le temps de calcul.

4. Y-a-t-il une différence significative entre la méthode de Simpson et les quatre méthodes rencontrées auparavant, dans notre exemple ?