L.E.G.T.A. Le Chesnoy
D. Blottière

Notes sur les fonctions circulaires réciproques

Table des matières

1 La fonction arcsinus

Soit fonction f est donc définie par :

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \sin(x) \qquad \Big(\text{restriction de sin à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\Big) .$$

(A) La fonction f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(B) La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f'(x) = \cos(x) > 0.$$

De (A), (B) et du théorème de la bijection, on déduit que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur son image $\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$.

Définition : La fonction arcsinus, notée arcsin, est l'application réciproque de l'application bijective

$$g\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \ , \ x \mapsto \sin(x).$$

On a donc :

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ y \mapsto \ \text{l'unique solution dans } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ de l'équation } \sin(x) = y.$$

Remarque : On a donc :

$$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin(y)) = y.$$

Propriétés

1. La fonction $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est impaire.
2. La fonction $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue sur $[-1, 1]$.

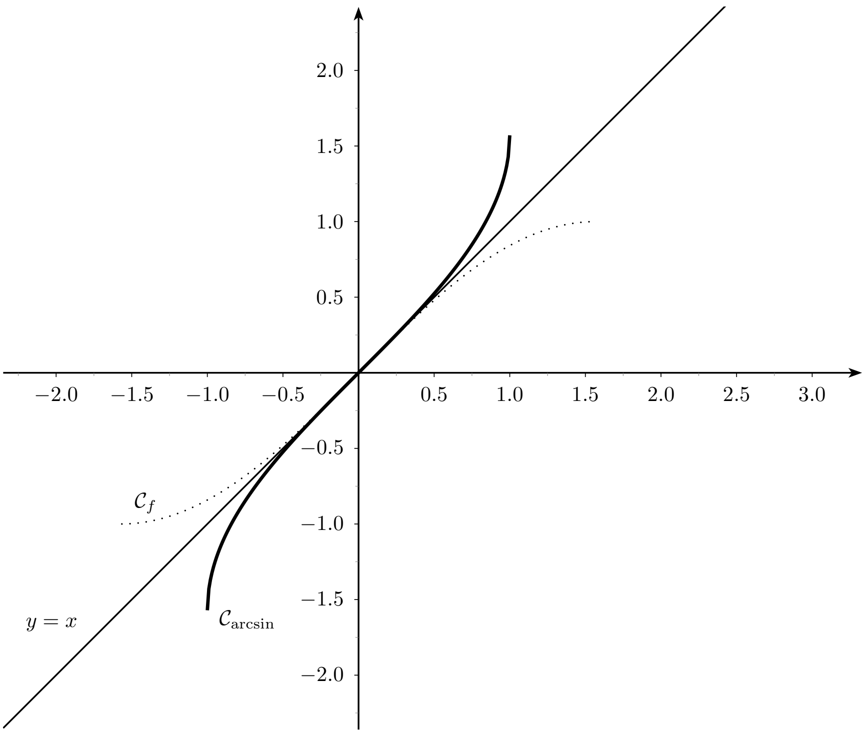
3. La fonction arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est dérivable sur $]-1,1[$.
4. Pour tout $y \in]-1,1[$, $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
5. Le tableau de variations de arcsin est :

x	-1		1
Variations de arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

6. Le tableau de signes de arcsin est :

x	-1		0		1
Signe de arcsin		$-$	0	$+$	

7. La courbe représentative de arccos dans un repère orthonormé du plan est :



Preuve de l'assertion 3 : Soit $y \in]-1,1[$.

La fonction

$$g\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]\ ,\ x \mapsto \sin(x)$$

est continue, bijective, dérivable en $x = \arcsin(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et son nombre dérivé en x ($\sin'(x) = \cos(x)$) n'est pas nul.

On en déduit que la réciproque de la fonction g, i.e. arcsin, est dérivable en $y = g(x)$ et que :

$$(*) \qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Comme $y \in]-1, 1[$, $\arcsin(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\arcsin(y)) > 0$. On a donc :

$$(**) \qquad \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{\cos^2(\arcsin(y))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))} = \sqrt{1 - y^2}.$$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Q.E.D.

2 Fonction arccosinus

On démontre, en utilisant le théorème de la bijection, que la fonction

$$h\colon [0, \pi] \to [-1, 1] \ , \ x \ \mapsto \cos(x)$$

est bijective.

Définition : La fonction arccosinus, notée arccos, est l'application réciproque de l'application bijective

$$h\colon [0, \pi] \to [-1, 1] \ , \ x \ \mapsto \cos(x).$$

On a donc :

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi] \ , \ y \mapsto \ \text{l'unique solution dans } [0, \pi] \text{ de l'équation } \cos(x) = y.$$

Remarque : On a donc :

$$\forall\, x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos(y)) = y.$$

Propriétés

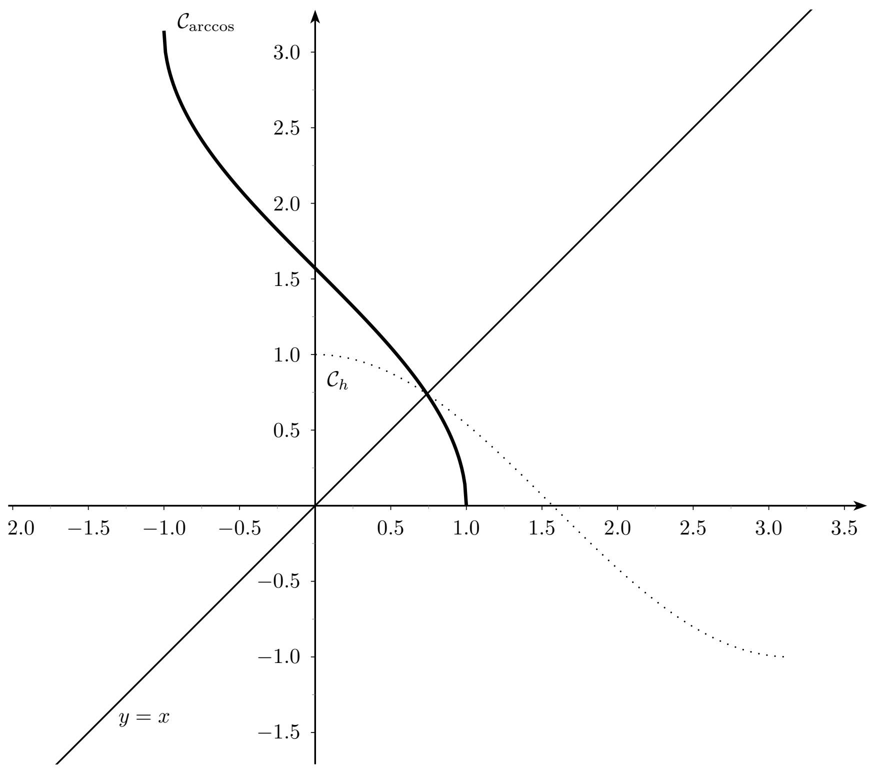
1. La fonction $\arcsin\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue sur $[-1, 1]$.
2. La fonction $\arcsin\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ est dérivable sur $]-1, 1[$.
3. Pour tout $y \in]-1, 1[$, $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.
4. Le tableau de variations de arccos est :

x	-1		1
Variations de arccos	π	$\searrow$	0

5. Le tableau de signes de arccos est :

x	-1 $\qquad$ 1
Signe de arccos	$+ \quad 0$

6. La courbe représentative de arccos dans un repère orthonormé du plan est :



3 Fonction arctan

On démontre, en utilisant le théorème de la bijection, que la fonction

$$k\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}\ ,\ x \ \mapsto \tan(x)$$

est bijective.

Définition : La fonction arctan, notée arctan, est l'application réciproque de l'application bijective

$$k\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}\ ,\ x \ \mapsto \tan(x).$$

On a donc :

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ y \mapsto \ \text{l'unique solution dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ de l'équation } \tan(x) = y.$$

Remarque : On a donc :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \arctan(\tan(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(y)) = y.$$

Propriétés

1. La fonction $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est impaire.

2. La fonction $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $y \in]-1,1[$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.
4. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Le tableau de variations de arctan est :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Variations de arctan	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$

6. Le tableau de signes de arctan est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de arctan	$-$	0	$+$

7. La courbe représentative de arctan dans un repère orthonormé du plan est :