# Chapitre VIII

# Rappels sur le dénombrement

## 1 Cardinal d'un ensemble fini

**Définition 1 (Cardinal d'un ensemble fini)**
Soit $E$ un ensemble fini (i.e. possédant un nombre fini d'éléments). Le cardinal de $E$, noté $\mathrm{Card}(E)$, est le nombre d'éléments de $E$.

► **Exemple 1 :** On a les égalités suivantes :

$$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0 \qquad \mathrm{Card}(\{2, 6, 7\}) = 3 \qquad \mathrm{Card}([\![1, 7]\!]) = 7.$$

► **Remarque**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Il existe une bijection $f\colon E \to F$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

**Théorème 1 (Cardinaux et sous-ensembles d'un ensemble fini)**
Soit $E$ un ensemble fini.

1. Soit $A$ est une partie de $E$.
   (a) L'ensemble $A$ est fini et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
   (b) On a l'équivalence :
   $$A = E \iff \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E).$$
   (c) On a l'égalité :
   $$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$
2. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. Alors on a :
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

► **Exemple 2**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal 32. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$ de cardinaux respectifs $\mathrm{Card}(A) = 20$ et $\mathrm{Card}(B) = 25$. Alors $\mathrm{Card}(A \cap B) \geq 13$, i.e. $A$ et $B$ ont au moins 13 éléments communs.

**Théorème 2 (Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont $n$ ensembles finis ($n \in \mathbb{N}^*$), alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

► **Exemple 3**

$$\mathrm{Card}(\{P, F\} \times [\![1, 6]\!]) = 12$$

**Théorème 3 (Cardinal et ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. L'ensemble des applications de $E$ dans $F$, noté $F^E$, est fini et sont cardinal est :

$$\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}\,E}.$$

► **Exemple 4**

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. Le cardinal de l'ensemble des applications de $[\![1, 5]\!]$ dans $\mathcal{C}$ est $32^5$.

**Définition 2 ($k$-uplet)**

Soit $E$ un ensemble. Un $k$-uplet d'élément de $E$ est un élément de $E^k$, i.e. un élément de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

où pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in E$.

► **Exemple 5**

$(6, 5, 1, 6)$ est un 4-uplet (ou un quadruplet) d'éléments de $[\![1, 6]\!]$.

► **Remarque**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. À chaque $k$-uplet d'éléments de $[\![1, n]\!]$ est associée, bijectivement, une application de l'ensemble $[\![1, k]\!]$ dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Cette correspondance bijective est donnée par :

$$(x_1, \ldots, x_k) \quad \mapsto \quad f : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]\ ,\ i \mapsto x_i.$$

On peut ainsi voir de deux façons, en appliquant le théorème 2 ou le théorème 3, que le nombre de $k$-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$ est $n^k$.

**Théorème 4 (Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini)**

Soit $E$ un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de $E$, est un ensemble fini. Il a pour cardinal :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

► **Exemple 6**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ a pour cardinal $2^n$.

# 2 Quatre situations de référence pour dénombrer

On considère :

- une boîte comportant $n$ cases ;
- $k$ boules semblables ou $k$ boules numérotées de 1 à $k$ .

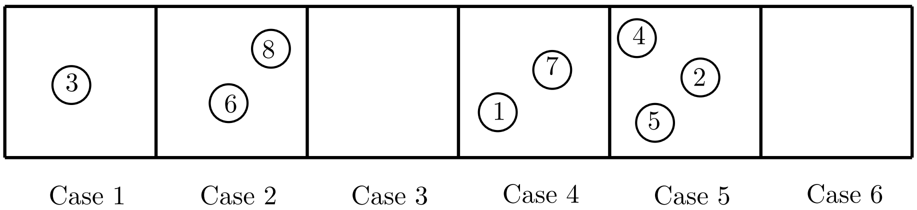
On se propose dans différentes situations, qui serviront de référence, de compter le nombre de dispositions possibles des $k$ boules dans les $n$ cases.

## 2.1 Situation de référence menant à $n^k$ dispositions

**Description de la situation**

- Chaque case peut accueillir un nombre quelconque de boules.
- Les boules sont numérotées de 1 à $k$.

**Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 8$**




On représente cette disposition par le 8-uplet d'éléments de $[\![1, 6]\!]$, i.e. par la suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1 = 4 \ , \ x_2 = 5 \ , \ x_3 = 1 \ , \ x_4 = 5 \ , \ x_5 = 5 \ , \ x_6 = 2 \ , \ x_7 = 4 \ , \ x_8 = 2)$$

de 8 entiers compris entre 1 et 6. Pour chaque $i \in [\![1, 8]\!]$, $x_i$ représente le numéro de la case où se trouve la boule n°$i$.

**Cas général**

Pour $n$ et $k$ quelconques, une disposition est représentée par un $k$-uplet d'éléments de $[\![1, n]\!]$, i.e. par *une suite ordonnée, avec répétitions éventuelles*

$$(x_1, \dots, x_k)$$

*de $k$ entiers compris entre* 1 *et* $n$. Pour chaque entier $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i$ représente le numéro de la case où est placée la boule n°$i$.

Le nombre total de dispositions est :

$$n^k.$$

C'est le nombre d'arrangements avec répétitions éventuelles de $k$ objets choisis parmi $n$.

**Autres modèles**

1. On envoie $k$ fois de suite une boule dans un ensemble de $n$ cases et on dénombre les différents résultats possibles. Un résultat sera identifié à la suite des numéros de cases atteintes, dans l'ordre où elles ont été atteintes ($n^k$ possibilités).

2. On jette $n$ fois *successivement* un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6). Un résultat sera représenté par un $n$-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_i$ est le chiffre obtenu au $i$-ème lancer ($6^n$ résultats possibles).

3. Un cadenas à secret est constitué de 4 tambours de 8 lettres $a, b, c, d, e, f, g, h$. Une « combinaison » est un quadruplet $(l_1, l_2, l_3, l_4)$ où pour chaque $i \in [\![1, 4]\!]$, $l_i$ est l'une des 8 lettres $a, b, c, d, e, f, g, h$ ($8^4$ possibilités).

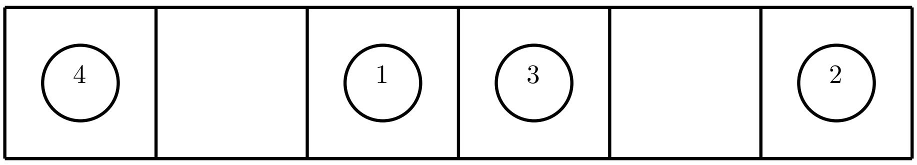
4. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue $k$ tirages *successifs, avec remise*, d'une boule de l'urne. Un résultat est un $k$-uplet $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers compris entre 1 et $n$ ($n^k$ possibilités).

## 2.2 Situation de référence menant à $A_n^k$ dispositions

**Description de la situation**

- Chaque case peut accueillir au plus une boule (donc $k \leq n$).
- Les boules sont numérotées de 1 à $k$.

**Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 4$**




Case 1 Case 2 Case 3 Case 4 Case 5 Case 6

On représente cette disposition par le quadruplet *sans répétition* d'entiers compris entre 1 et 6, i.e. par la suite ordonnée sans répétition

$$(x_1 = 3\ ,\ x_2 = 6\ ,\ x_3 = 4\ ,\ x_4 = 1)$$

de 4 entiers compris entre 1 et 6. Pour chaque $i \in [\![1, 4]\!]$, $x_i$ représente le numéro de la case où se trouve la boule n°$i$.

**Cas général**

Pour $n$ et $k$ quelconques, une disposition est représentée par un $k$-uplet *sans répétition* d'éléments de $[\![1, n]\!]$, i.e. par une *suite ordonnée, sans répétition,*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

*de $k$ entiers compris entre 1 et $n$*. Pour chaque entier $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i$ représente le numéro de case où est placée la boule n°$i$.

**► Remarque**

À chaque $k$-uplet *sans répétition* d'éléments de $[\![1, n]\!]$ est associée, bijectivement, une application *injective* de l'ensemble $[\![1, k]\!]$ dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Cette correspondance bijective est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_k) \quad \mapsto \quad f : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]\ ,\ i \mapsto x_i.$$

Le nombre total de dispositions est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k.$$

C'est le nombre d'arrangements *sans répétition* de $k$ objets choisis parmi $n$.

**Autres modèles**

1. À l'aide des 26 lettres de l'alphabet, on forme un « mot » (suite ordonnée de lettres ayant ou non un sens) dont les lettres sont deux à deux différentes. Un tel mot se réprésente par un 10-uplet *sans répétition* d'éléments de l'ensemble

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

   ($A_{26}^{10}$ possibilités).

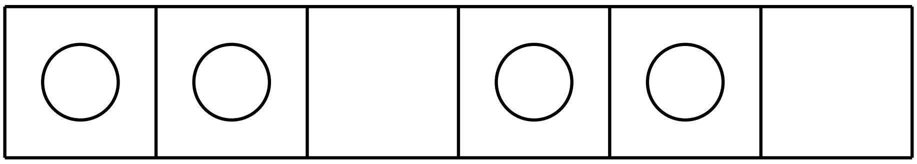
2. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et on fait $k$ tirages *successifs, sans remise* d'une boule. On note les numéros des boules sorties dans l'ordre de leur sortie. Un résultat est représenté par un $k$-uplet *sans répétition* d'éléments de $[\![1, n]\!]$ ($A_n^k$ résultats possibles).

## 2.3 Situation de référence menant à $C_n^k$ dispositions

**Description de la situation**

- Chaque case peut accueillir au plus une boule (donc $k \leq n$).
- Les boules sont semblables (non numérotées).

**Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 4$**




On représente cette disposition par la partie

$$\{1, 2, 4, 5\}$$

à 4 éléments de l'ensemble $[\![1, 6]\!]$. Les éléments de cette partie correspondent aux numéros des cases qui contiennent une boule.

**Cas général**

Pour $n$ et $k$ quelconques, une disposition est représentée par une *partie $E$ à $k$ éléments de l'ensemble* $[\![1, n]\!]$. Un entier $i \in [\![1, n]\!]$ appartient à la partie $E$ si et seulement si la case numérotée $i$ contient une boule.

Le nombre total de dispositions est le nombre de combinaisons (sans répétition) de $k$ objets parmi $n$ :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

C'est le nombre de parties à $k$ éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ ou plus généralement d'un ensemble à $n$ éléments.

**Autres modèles**

1. Avec un jeu de 52 cartes, on forme une main de 5 cartes sans figure. Un telle main s'identifie à un 5-uplet (ou quintuplet) d'éléments de

$$[\![1, 10]\!] \times \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

   ($C_{40}^5$ possibilités).

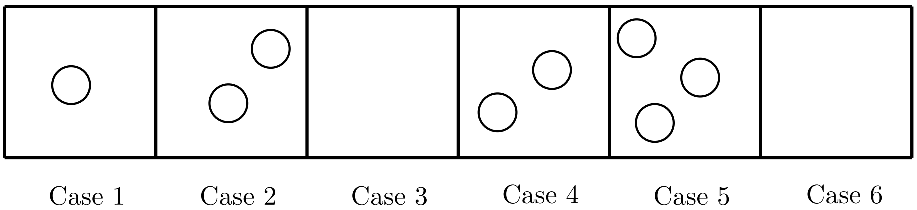
2. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et on tire *simultanément* $k$ boules de l'urne. On note les numéros des boules sorties. Un résultat est représenté par une partie de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ ($C_n^k$ résultats possibles).

### 2.4 Situation de référence menant à $C_{n+k-1}^k$ dispositions

**Description de la situation**

- Chaque case peut accueillir un nombre quelconque de boules.
- Les boules sont semblables (non numérotées).

**Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 8$**




On représente cette disposition par le 6-uplet d'entiers naturels, i.e. par la suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_3 = 0\ ,\ x_4 = 2\ ,\ x_5 = 3\ ,\ x_6 = 0)$$

d'entiers naturels. Pour chaque $i \in [\![1, 6]\!]$, $x_i$ représente le nombre de boules placées dans la case n°$i$. On remarque que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$.

**Cas général**

Pour $n$ et $k$ quelconques, une disposition est représentée par un $n$-uplet d'entiers naturels, i.e. par une suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

d'entiers naturels vérifiant la condition :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k.$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i$ représente le nombre de boules placées dans la case n°$i$.

Pour faire le dénombrement, on s'intéresse aux dispositions relatives des objets par rapport aux cloisons *internes* de la boîte.

**Dénombrement dans le cas où $n = 6$ et $k = 8$**

On peut représenter la disposition de l'exemple ci-dessus par le diagramme suivant.

O | O O | | O O | O O O |

On a donc disposé 5 cloisons (désignées par le symbole |) et 8 objets (désignés par le symbole O) sur 13 emplacements. À la disposition notée $\mathcal{D}$ de l'exemple, on associe la partie $E_{\mathcal{D}} = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$ à 8 éléments de l'ensemble $[\![1, 13]\!]$. Les éléments de $E_{\mathcal{D}}$ sont les places où figurent un symbole O dans le diagramme de la disposition $\mathcal{D}$. Cette association $\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$ se généralise à toute disposition $\mathcal{D}$. L'application

$$\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$$

de l'ensemble des dispositions possibles vers l'ensemble des parties à 8 éléments de $[\![1, 13]\!]$ est bijective. Le nombre de dispositions possibles dans le cas où $n = 6$ et $k = 8$ est donc :

$$C_{13}^8 = C_{6+8-1}^8.$$

**Dénombrement dans le cas général**

L'association $\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$, introduite dans le cas $n = 6$ et $k = 8$, se généralise au cas où $n$ et $k$ sont quelconques. Elle permet de définir une application bijective de l'ensemble des dispositions possibles vers l'ensemble des parties à $k$ éléments de $[\![1, n+k-1]\!]$ (une boîte à $n$ cases possède $n-1$ cloisons internes).

Le nombre total de dispositions possibles est donc :

$$C_{n+k-1}^{k}.$$

C'est le nombre de combinaisons avec répétition de $k$ objets parmi $n$.

**Autres modèles**

1. On tire, avec remise, $k$ objets discernables d'une urne en contenant $n$ (discernables), sans tenir compte de l'ordre de sortie. Le nombre total de tirages est $C_{n+k-1}^{k}$.

2. Un restaurant propose huit desserts différents. Une famille de quatre personnes passe la commande. Le serveur apporte les 4 desserts sur un plateau. Le nombre possible de plateaux différents est $C_{11}^{4}$.