

# Chapitre VIII

## Rappels sur le dénombrement

### 1 Cardinal d'un ensemble fini

#### Définition 1 (Cardinal d'un ensemble fini)

Soit  $E$  un ensemble fini (i.e. possédant un nombre fini d'éléments). Le cardinal de  $E$ , noté  $\text{Card}(E)$ , est le nombre d'éléments de  $E$ .

► **Exemple 1** : On a les égalités suivantes :

$$\text{Card}(\emptyset) = 0 \quad \text{Card}(\{2, 6, 7\}) = 3 \quad \text{Card}(\llbracket 1, 7 \rrbracket) = 7.$$

► **Remarque**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Il existe une bijection  $f: E \rightarrow F$  si et seulement si  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ .

#### Théorème 1 (Cardinaux et sous-ensembles d'un ensemble fini)

Soit  $E$  un ensemble fini.

1. Soit  $A$  est une partie de  $E$ .

(a) L'ensemble  $A$  est fini et  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$ .

(b) On a l'équivalence :

$$A = E \iff \text{Card}(A) = \text{Card}(E).$$

(c) On a l'égalité :

$$\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

2. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

► **Exemple 2**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal 32. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  de cardinaux respectifs  $\text{Card}(A) = 20$  et  $\text{Card}(B) = 25$ . Alors  $\text{Card}(A \cap B) \geq 13$ , i.e.  $A$  et  $B$  ont au moins 13 éléments communs.

**Théorème 2 (Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis)**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $E \times F$  est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Plus généralement, si  $E_1, \dots, E_n$  sont  $n$  ensembles finis ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), alors  $E_1 \times \dots \times E_n$  est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \text{Card}(E_i).$$

**► Exemple 3**

$$\text{Card}(\{P, F\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket) = 12$$

**Théorème 3 (Cardinal et ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini)**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ , noté  $F^E$ , est fini et son cardinal est :

$$\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}E}.$$

**► Exemple 4**

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. Le cardinal de l'ensemble des applications de  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  dans  $\mathcal{C}$  est  $32^5$ .

**Définition 2 ( $k$ -uplet)**

Soit  $E$  un ensemble. Un  $k$ -uplet d'éléments de  $E$  est un élément de  $E^k$ , i.e. un élément de la forme :

$$(x_1, \dots, x_k)$$

où pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $x_i \in E$ .

**► Exemple 5**

$(6, 5, 1, 6)$  est un 4-uplet (ou un quadruplet) d'éléments de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

**► Remarque**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . À chaque  $k$ -uplet d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est associée, bijectivement, une application de l'ensemble  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Cette correspondance bijective est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto f: \llbracket 1, k \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket, i \mapsto x_i.$$

On peut ainsi voir de deux façons, en appliquant le théorème 2 ou le théorème 3, que le nombre de  $k$ -uplets d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est  $n^k$ .

**Théorème 4 (Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini)**

Soit  $E$  un ensemble fini. Alors  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ , est un ensemble fini. Il a pour cardinal :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

**► Exemple 6**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  a pour cardinal  $2^n$ .

## 2 Quatre situations de référence pour dénombrer

On considère :

- une boîte comportant  $n$  cases ;
- $k$  boules semblables ou  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$  .

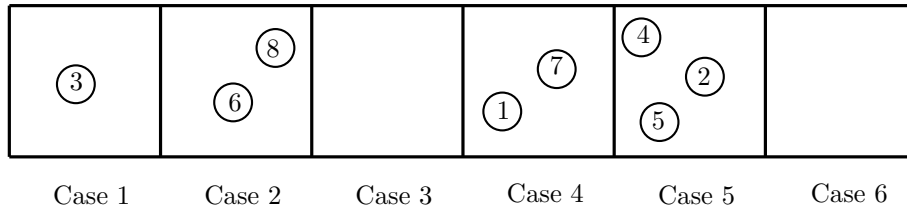
On se propose dans différentes situations, qui serviront de référence, de compter le nombre de dispositions possibles des  $k$  boules dans les  $n$  cases.

### 2.1 Situation de référence menant à $n^k$ dispositions

#### Description de la situation

- Chaque case peut accueillir un nombre quelconque de boules.
- Les boules sont numérotées de 1 à  $k$ .

#### Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 8$



On représente cette disposition par le 8-uplet d'éléments de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ , i.e. par la suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1, x_4 = 5, x_5 = 5, x_6 = 2, x_7 = 4, x_8 = 2)$$

de 8 entiers compris entre 1 et 6. Pour chaque  $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le numéro de la case où se trouve la boule  $n^\circ i$ .

#### Cas général

Pour  $n$  et  $k$  quelconques, une disposition est représentée par un  $k$ -uplet d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , i.e. par *une suite ordonnée, avec répétitions éventuelles*

$$(x_1, \dots, x_k)$$

de  $k$  entiers compris entre 1 et  $n$ . Pour chaque entier  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le numéro de la case où est placée la boule  $n^\circ i$ .

Le nombre total de dispositions est :

$$n^k.$$

C'est le nombre d'arrangements avec répétitions éventuelles de  $k$  objets choisis parmi  $n$ .

#### Autres modèles

1. On envoie  $k$  fois de suite une boule dans un ensemble de  $n$  cases et on dénombre les différents résultats possibles. Un résultat sera identifié à la suite des numéros de cases atteintes, dans l'ordre où elles ont été atteintes ( $n^k$  possibilités).

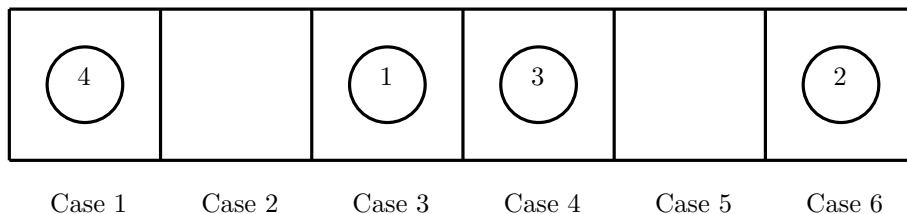
2. On jette  $n$  fois *successivement* un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6). Un résultat sera représenté par un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  où  $x_i$  est le chiffre obtenu au  $i$ -ème lancer ( $6^n$  résultats possibles).
3. Un cadenas à secret est constitué de 4 tambours de 8 lettres  $a, b, c, d, e, f, g, h$ . Une « combinaison » est un quadruplet  $(l_1, l_2, l_3, l_4)$  où pour chaque  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $l_i$  est l'une des 8 lettres  $a, b, c, d, e, f, g, h$  ( $8^4$  possibilités).
4. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue  $k$  tirages *successifs*, avec remise, d'une boule de l'urne. Un résultat est un  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k)$  d'entiers compris entre 1 et  $n$  ( $n^k$  possibilités).

## 2.2 Situation de référence menant à $A_n^k$ dispositions

### Description de la situation

- Chaque case peut accueillir au plus une boule (donc  $k \leq n$ ).
- Les boules sont numérotées de 1 à  $k$ .

Exemple de disposition pour  $n = 6$  et  $k = 4$



On représente cette disposition par le quadruplet *sans répétition* d'entiers compris entre 1 et 6, i.e. par la suite ordonnée sans répétition

$$(x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 1)$$

de 4 entiers compris entre 1 et 6. Pour chaque  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le numéro de la case où se trouve la boule n°  $i$ .

### Cas général

Pour  $n$  et  $k$  quelconques, une disposition est représentée par un  $k$ -uplet *sans répétition* d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , i.e. par une *suite ordonnée, sans répétition*,

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

de  $k$  entiers compris entre 1 et  $n$ . Pour chaque entier  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le numéro de case où est placée la boule n°  $i$ .

### ► Remarque

À chaque  $k$ -uplet *sans répétition* d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est associée, bijectivement, une application *injective* de l'ensemble  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Cette correspondance bijective est donnée par :

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto f: \llbracket 1, k \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket, i \mapsto x_i.$$

Le nombre total de dispositions est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k.$$

C'est le nombre d'arrangements *sans répétition* de  $k$  objets choisis parmi  $n$ .

### Autres modèles

- À l'aide des 26 lettres de l'alphabet, on forme un « mot » (suite ordonnée de lettres ayant ou non un sens) dont les lettres sont deux à deux différentes. Un tel mot se représente par un 10-uplet *sans répétition* d'éléments de l'ensemble

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

( $A_{26}^{10}$  possibilités).

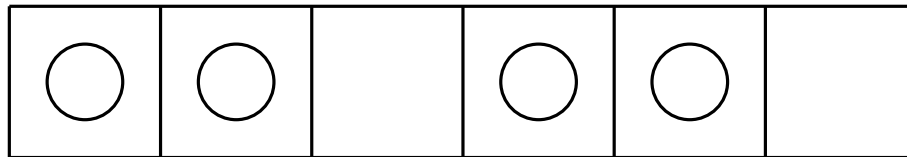
- Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et on fait  $k$  tirages *successifs, sans remise* d'une boule. On note les numéros des boules sorties dans l'ordre de leur sortie. Un résultat est représenté par un  $k$ -uplet *sans répétition* d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ( $A_n^k$  résultats possibles).

### 2.3 Situation de référence menant à $C_n^k$ dispositions

#### Description de la situation

- Chaque case peut accueillir au plus une boule (donc  $k \leq n$ ).
- Les boules sont semblables (non numérotées).

Exemple de disposition pour  $n = 6$  et  $k = 4$



Case 1      Case 2      Case 3      Case 4      Case 5      Case 6

On représente cette disposition par la partie

$$\{1, 2, 4, 5\}$$

à 4 éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Les éléments de cette partie correspondent aux numéros des cases qui contiennent une boule.

#### Cas général

Pour  $n$  et  $k$  quelconques, une disposition est représentée par une *partie*  $E$  à  $k$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Un entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  appartient à la partie  $E$  si et seulement si la case numérotée  $i$  contient une boule.

Le nombre total de dispositions est le nombre de combinaisons (sans répétition) de  $k$  objets parmi  $n$  :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

C'est le nombre de parties à  $k$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ou plus généralement d'un ensemble à  $n$  éléments.

#### Autres modèles

- Avec un jeu de 52 cartes, on forme une main de 5 cartes sans figure. Une telle main s'identifie à un 5-uplet (ou quintuplet) d'éléments de

$$\llbracket 1, 10 \rrbracket \times \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$$

( $C_{40}^5$  possibilités).

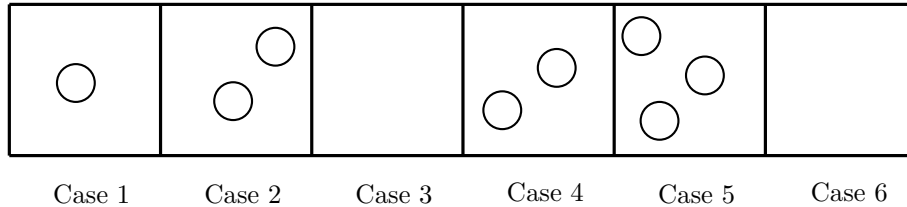
- Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et on tire *simultanément*  $k$  boules de l'urne. On note les numéros des boules sorties. Un résultat est représenté par une partie de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ( $C_n^k$  résultats possibles).

## 2.4 Situation de référence menant à $C_{n+k-1}^k$ dispositions

### Description de la situation

- Chaque case peut accueillir un nombre quelconque de boules.
- Les boules sont semblables (non numérotées).

### Exemple de disposition pour $n = 6$ et $k = 8$



On représente cette disposition par le 6-uplet d'entiers naturels, i.e. par la suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 3, x_6 = 0)$$

d'entiers naturels. Pour chaque  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le nombre de boules placées dans la case n° $i$ . On remarque que  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$ .

### Cas général

Pour  $n$  et  $k$  quelconques, une disposition est représentée par un  $n$ -uplet d'entiers naturels, i.e. par une suite ordonnée avec répétitions éventuelles

$$(x_1, \dots, x_n)$$

d'entiers naturels vérifiant la condition :

$$\sum_{i=1}^n x_i = k.$$

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i$  représente le nombre de boules placées dans la case n° $i$ .

Pour faire le dénombrement, on s'intéresse aux dispositions relatives des objets par rapport aux cloisons *internes* de la boîte.

### Dénombrement dans le cas où $n = 6$ et $k = 8$

On peut représenter la disposition de l'exemple ci-dessus par le diagramme suivant.

$$O | O O | | O O | O O O |$$

On a donc disposé 5 cloisons (désignées par le symbole  $|$ ) et 8 objets (désignés par le symbole  $O$ ) sur 13 emplacements. À la disposition notée  $\mathcal{D}$  de l'exemple, on associe la partie  $E_{\mathcal{D}} = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$  à 8 éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, 13 \rrbracket$ . Les éléments de  $E_{\mathcal{D}}$  sont les places où figurent un symbole  $O$  dans le diagramme de la disposition  $\mathcal{D}$ . Cette association  $\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$  se généralise à toute disposition  $\mathcal{D}$ . L'application

$$\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$$

de l'ensemble des dispositions possibles vers l'ensemble des parties à 8 éléments de  $\llbracket 1, 13 \rrbracket$  est bijective. Le nombre de dispositions possibles dans le cas où  $n = 6$  et  $k = 8$  est donc :

$$C_{13}^8 = C_{6+8-1}^8.$$

### Dénombrement dans le cas général

L'association  $\mathcal{D} \mapsto E_{\mathcal{D}}$ , introduite dans le cas  $n = 6$  et  $k = 8$ , se généralise au cas où  $n$  et  $k$  sont quelconques. Elle permet de définir une application bijective de l'ensemble des dispositions possibles vers l'ensemble des parties à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n + k - 1 \rrbracket$  (une boîte à  $n$  cases possède  $n - 1$  cloisons internes).

Le nombre total de dispositions possibles est donc :

$$C_{n+k-1}^k.$$

C'est le nombre de combinaisons avec répétition de  $k$  objets parmi  $n$ .

### Autres modèles

1. On tire, avec remise,  $k$  objets discernables d'une urne en contenant  $n$  (discernables), sans tenir compte de l'ordre de sortie. Le nombre total de tirages est  $C_{n+k-1}^k$ .
2. Un restaurant propose huit desserts différents. Une famille de quatre personnes passe la commande. Le serveur apporte les 4 desserts sur un plateau. Le nombre possible de plateaux différents est  $C_{11}^4$ .