Chapitre VI

Applications linéaires

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
- les éléments neutres de $\mathbb{K}$, E, F pour l'addition sont respectivement désignés par $0_{\mathbb{K}}$, 0_E, 0_F.

1 Définitions et propriétés élémentaires.

Définition 1 (Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme)

- Soit $\varphi\colon E \to F$ une application. On dit que φ est *linéaire* si et seulement si

$$(\mathrm{P}) \qquad \forall\, u_1, u_2 \in E \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) = \lambda_1.\varphi(u_1) + \lambda_2.\varphi(u_2).$$

- Une application linéaire de E dans E est appelé *endomorphisme* de E.
- Une application linéaire bijective de E dans F est appelé un *isomorphisme*.
- L'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

► Remarque

Soit $\varphi\colon E \to F$ une application. Si φ est linéaire, alors φ vérifie les conditions :

$$\begin{cases} (\mathrm{A}) \quad \forall\, u_1, u_2 \in E \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \qquad (\text{Appliquer (P) avec } \lambda_1 = \lambda_2 = 1.) \\ (\mathrm{H}) \quad \forall\, u \in E \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda.u) = \lambda.\varphi(u) \qquad (\text{Appliquer (P) avec } u_1 = u,\ u_2 = 0_E,\ \lambda_1 = \lambda \text{ et } \lambda_2 = 0_{\mathbb{K}}.) \end{cases}.$$

La réciproque est également vraie, i.e. : si φ vérifie les conditions (A) et (H), alors φ est linéaire.

► Exemple 1 : Les applications

$$\varphi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y \qquad \text{et} \qquad \varphi_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sont linéaires.

Proposition 1

Si $\varphi\colon E \to F$ est une application linéaire, alors $\varphi(0_E) = 0_F$.

Preuve

De $0_E = 0_E + 0_E$, on déduit : $(*) \quad \varphi(0_E) = \varphi(0_E + 0_E)$. Or φ est linéaire donc : $(**) \quad \varphi(0_E + 0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E)$. De $(*)$ et $(**)$, on déduit : $(***) \quad \varphi(0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E)$. En ajoutant l'opposé de $\varphi(0_E)$ à chacun des deux membres de l'égalité $(***)$, on obtient $0_F = \varphi(0_E)$. Q.E.D.

Théorème 1 (Opérations sur les applications linéaires)

- Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors l'application
$$\varphi + \psi \colon E \to F \ , \ u \mapsto \varphi(u) + \psi(u)$$
est linéaire, i.e. $\varphi + \psi \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors l'application
$$\lambda.\varphi \colon E \to F \ , \ u \mapsto \lambda.\varphi(u)$$
est linéaire, i.e. $\lambda.\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors l'application
$$\psi \circ \varphi \colon E \to G \ , \ u \mapsto \psi(\varphi(u))$$
est linéaire, i.e. $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E,G)$.

- Soit $\varphi \colon E \to F$ un isomorphisme. Alors sa bijection réciproque
$$\varphi^{-1} \colon F \to E \ , \ v \mapsto \text{l'unique élément } u \text{ de } E \text{ tel que } \varphi(u) = v$$
est linéaire, i.e. $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

► **Exemple 2**

L'application
$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
est linéaire et bijective. Sa bijection réciproque est l'application linéaire :
$$\varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ -3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Théorème 2 (Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$)

On définit une opération interne $+$ sur $\mathcal{L}(E,F)$, en associant à $(\varphi,\psi) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ l'application linéaire (cf. théorème 1) :
$$\varphi + \psi \colon E \to F \ , \ u \mapsto \varphi(u) + \psi(u)$$
et une opération externe . sur $\mathcal{L}(E,F)$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$, en associant à $(\lambda,\varphi) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E,F)$ l'application linéaire (cf. théorème 1) :
$$\lambda.\varphi \colon E \to F \ , \ u \mapsto \lambda.\varphi(u).$$
Alors $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

► **Exemple 3**

1. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}^4),+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_2(\mathbb{R})),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. $(\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2 (Noyau et image d'une application linéaire)

Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

- Le noyau de φ, noté $\mathrm{Ker}(\varphi)$, est défini par :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \ : \ \varphi(u) = 0_F\}.$$

  C'est l'ensemble de tous les antécédents de 0_F par φ.

- L'image de φ, notée $\mathrm{Im}(\varphi)$, est définie par :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(u) \ : \ u \in E\}.$$

  C'est l'ensemble de toutes les images par φ des vecteurs de E.

► **Exemple 4**

On considère les applications linéaires φ_1 et φ_2 introduites dans l'exemple 1.

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathbb{R}$.

2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_2) = \left\{ \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x'+y'+z'=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Proposition 2 (Structure de Ker(φ) et Im(φ))

Soit $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire.

- Le noyau de φ, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, est un sous-espace vectoriel de E.
- L'image de φ, $\mathrm{Im}(\varphi)$, est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve

- On sait (cf. proposition 1) que $\varphi(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. En particulier : $(*)\quad \mathrm{Ker}(\varphi) \neq \emptyset$.

  Soient $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. On veut prouver que $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, i.e. $\varphi(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) = 0_F$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) &= \lambda_1.\varphi(u_1) + \lambda_2.\varphi(u_2) \qquad (\varphi \text{ est linéaire})\\ &= \lambda_1.0_F + \lambda_2.0_F \qquad (u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ donc } \varphi(u_1) = \varphi(u_2) = 0_F)\\ &= 0_F \qquad (\text{cf. axiomes de structure des espaces vectoriels})\end{aligned}$$

  Ainsi a-t-on : $(**)\quad \forall\, u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

  De $(*)$ et $(**)$, on déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Comme $\varphi(0_E) = 0_F$ (cf. proposition 1), $0_F \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Par suite : $(*)\quad \mathrm{Im}(\varphi) \neq \emptyset$.

  Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. On va démontrer que $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, i.e. que $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2$ est l'image d'un élément de E par φ. Comme $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $u_1, u_2 \in E$ tels que : $(**)\quad v_1 = \varphi(u_1)$ et $v_2 = \varphi(u_2)$.

$$\begin{aligned}\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 &= \lambda_1.\varphi(u_1) + \lambda_2.\varphi(u_2) \qquad (\text{cf. } (**))\\ &= \varphi(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) \qquad (\varphi \text{ est linéaire})\end{aligned}$$

  Ainsi $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2$ est-il égal à $\varphi(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2)$. Donc $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

  On a donc : $(***)\quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi) \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

  De $(*)$ et $(***)$, on déduit que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 3 (Noyau et injectivité, image et surjectivité)

Soit $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire.

- L'application φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.
- L'application φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) = F$.

Preuve

- Supposons φ injective et montrons $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

  Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Il reste à prouver l'inclusion inverse, i.e. : $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0_E\}$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(u) = 0_F$. Mais $\varphi(0_E) = 0_F$. Ainsi u et 0_E ont-ils la même image par φ. L'application φ étant injective, ceci implique $u = 0_E$.

  Supposons $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et montrons que φ est injective.

  Soient $u_1, u_2 \in E$ tels que $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Alors $(*)\quad \varphi(u_1) - \varphi(u_2) = 0_F$. Mais $(**)\quad \varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \varphi(u_1 - u_2)$ (linéarité de f). De $(*)$ et $(**)$, on déduit que $\varphi(u_1 - u_2) = 0_F$. Donc $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$, $u_1 - u_2 = 0_E$. Donc $u_1 = u_2$.
- La deuxième assertion est en fait exactement la définition de la surjectivité. Il s'agit d'un rappel de la définition et il n'y a rien à montrer.

▶ **Exemple 5**

L'application

$$\varphi\colon \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]\ ,\ P \mapsto P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$

est linéaire. Elle est de plus injective car son noyau est nul, i.e. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Preuve de l'assertion $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$

- L'inclusion $(*)\quad \mathrm{Ker}(\varphi) \supset \{0\}$ est claire car $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_1[X]$.
- Montrons l'inclusion $(**)\quad \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$. Soit $P = a_0 + a_1X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(P) = 0$, i.e. $a_0 + (a_0 + a_1)X + (a_0 + 2a_1)X^2 = 0$. On a donc $a_0 = a_0 + a_1 = a_0 + 2a_1 = 0$. On montre que ces conditions impliquent $a_0 = a_1 = 0$. Ainsi a-t-on $P = 0$.
- De $(*)$ et $(**)$, on déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

2 Matrices et applications linéaires : exemples

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$

Soit l'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y + 3z \end{pmatrix}$. On calcule les coordonnées de $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ dans la base $\mathcal{F}$ comme suit.

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f_1 + 2f_2$; les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{F}$ sont donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2f_1 - f_2$; les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{F}$ sont donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -f_1 + 3f_2$; les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{F}$ sont donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Définition 3

La matrice de l'application φ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, est la matrice 2×3 dont la i-ème colonne est formée des coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base $\mathcal{F}$, i.e. : $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Lemme 1

Si $u \in \mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$, alors $\varphi(u)$ a pour coordonnées $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$.

Preuve

Par hypothèse, on a $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) \qquad \text{(linéarité de } \varphi\text{)} \\ &= x(f_1 + 2f_2) + y(2f_1 - f_2) + z(-f_1 + 3f_2) \qquad \text{(cf. calculs de } \varphi(e_1),\ \varphi(e_2),\ \varphi(e_3)\text{)} \\ &= \boxed{(x + 2y - z)}\, f_1 + \boxed{(2x - y + 3z)}\, f_2 \end{aligned}$$

Les coordonnées de $\varphi(u)$ sont donc $\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y + 3z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{F}$. Enfin on vérifie que

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y + 3z \end{pmatrix}.$$

Q.E.D.

▶ **Exemple 6**

Les coordonnées de $\varphi(3e_1 + e_2 - e_1)$ dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, i.e. :

$$\varphi(3e_1 + e_2 - e_1) = 6f_1 + 2f_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Application linéaire associée à une matrice, relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 2

L'application $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qui associe à $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u) \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées, dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$, sont $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est linéaire.

Preuve

Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On note $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de u_1 et u_2, dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

- Les coordonnées respectives de $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_1)$ et $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_2)$, dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$, sont :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y_1 - z_1 \\ 4x_1 - 3y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y_2 - z_2 \\ 4x_2 - 3y_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_1) = (5y_1 - z_1)f_1 + (4x_1 - 3y_1)f_2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_2) = (5y_2 - z_2)f_1 + (4x_2 - 3y_2)f_2.$$

On a donc : $(*)$ $\quad \lambda_1.\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_1) + \lambda_2.\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_2)$ égale

$$\boxed{(\lambda_1(5y_1 - z_1) + \lambda_2(5y_2 - z_2))}\, f_1 + \boxed{(\lambda_1(4x_1 - 3y_1) + \lambda_2(4x_2 - 3y_2))}\, f_2.$$

- Par définition des coordonnées dans une base, on a :

$$u_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3 \qquad \text{et} \qquad u_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3.$$

On a donc

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 = \boxed{(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)}\, e_1 + \boxed{(\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2)}\, e_2 + \boxed{(\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2)}\, e_3.$$

Les coordonnées de $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2$, dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ sont donc : $\begin{pmatrix} \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 \\ \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 \\ \lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2)$, dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$, sont donc :

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 \\ \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 \\ \lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) - (\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2) \\ 4(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) - 3(\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(5y_1 - z_1) + \lambda_2(5y_2 - z_2) \\ \lambda_1(4x_1 - 3y_1) + \lambda_2(4x_2 - 3y_2) \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a : $(**)$ $\quad \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2)$ égale

$$\boxed{(\lambda_1(5y_1 - z_1) + \lambda_2(5y_2 - z_2))}\, f_1 + \boxed{(\lambda_1(4x_1 - 3y_1) + \lambda_2(4x_2 - 3y_2))}\, f_2.$$

- En comparant $(*)$ et $(**)$, on observe :

$$\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) = \lambda_1.\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_1) + \lambda_2.\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u_2).$$

Q.E.D.

Définition 4

L'application linéaire $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie ci-dessus est appelée *application linéaire associée à la matrice A relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.*

► Exemple 7

Les coordonnées de $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(e_1 - 2e_2 + 3e_3)$ dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ sont $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$, i.e. $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(e_1 - 2e_2 + 3e_3) = -13f_1 + 10f_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$.

► Remarque

Après avoir fixé des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, on a :

- associé à une application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une matrice $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ de taille 2×3 (cf. 2.1) ;
- associé à une matrice A de taille 2×3 une application linéaire $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (cf. ci-dessus).

On va voir dans la partie suivante, que ces deux constructions $\varphi \rightsquigarrow \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A \rightsquigarrow \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ se généralisent et sont des constructions ≪ inverses ≫ l'une de l'autre.

3 Matrices et applications linéaires : étude générale

Notations

- E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ;
- $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ désigne une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Can_{\mathbb{R}^n}$ (resp. $Can_{\mathbb{R}_n[X]}$) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$).

Définition 5 (Matrice d'une application linéaire dans une base)

Soit $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. La *matrice de l'application linéaire φ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$* est la matrice $n \times p$, notée $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, dont la i-ème colonne est formée des coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base $\mathcal{F}$ de F.

► **Exemple 8**

1. Dans l'exemple 1 :

$$\mathrm{Mat}(\varphi_1, Can_{\mathbb{R}^2}, Can_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}(\varphi_2, Can_{\mathbb{R}^3}, Can_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto 2P + 3P'$, où P' désigne le polynôme dérivé de P. Cette application est linéaire. On calcule les coordonnées des images des éléments de $Can_{\mathbb{R}_2[X]}$ par φ, dans la base $Can_{\mathbb{R}_2[X]}$.

$$\varphi(1) = 2 = \begin{array}{c} \boxed{2}\,1 \\ + \\ \boxed{0}\,X \\ + \\ \boxed{0}\,X^2 \end{array} \quad ; \quad \varphi(X) = 2X + 3 = \begin{array}{c} \boxed{3}\,1 \\ + \\ \boxed{2}\,X \\ + \\ \boxed{0}\,X^2 \end{array} \quad ; \quad \varphi(X^2) = 2X^2 + 6X = \begin{array}{c} \boxed{0}\,1 \\ + \\ \boxed{6}\,X \\ + \\ \boxed{2}\,X^2 \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Mat}(\varphi, Can_{\mathbb{R}_2[X]}, Can_{\mathbb{R}_2[X]}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Lemme 3 (Retrouver l'application linéaire à partir de sa matrice dans des bases.)

Soit $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Si $u \in E$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$ de E, alors $\varphi(u)$ a pour coordonnées $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{F}$ de F.

Preuve

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.

Proposition 4 (Application linéaire associée à une matrice relativement à des bases)
Soit A une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors l'application $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon E \to F$ définie par :

$$u \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{E} \quad \mapsto \quad \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})(u) \text{ de coordonnées } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{F}$$

est linéaire ; on la nomme *application linéaire associée à la matrice A relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.*

Preuve

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.

► **Exemple 9**

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $\mathrm{App}(A, Can_{\mathbb{R}_1[X]}, Can_{\mathbb{R}^2})\colon \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2$. On calcule :

$$\mathrm{App}(A, Can_{\mathbb{R}_1[X]}, Can_{\mathbb{R}^2})(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{App}(A, Can_{\mathbb{R}_1[X]}, Can_{\mathbb{R}^2})(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et plus généralement

$$\mathrm{App}(A, Can_{\mathbb{R}_1[X]}, Can_{\mathbb{R}^2})(a_0 + a_1 X) = \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 \\ a_0 + 3a_1 \end{pmatrix}$$

pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. On remarque que pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, $\mathrm{App}(A, Can_{\mathbb{R}_1[X]}, Can_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} P(2) \\ P(3) \end{pmatrix}$.

Proposition 5 ($\varphi \rightsquigarrow$ Mat$(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A \rightsquigarrow$ App$(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})$: des constructions inverses l'une de l'autre)
On a les deux propriétés :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, F) \quad \mathrm{App}(\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \varphi \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Mat}(\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{E}, \mathcal{F}) = A.$$

Par suite les deux applications :

$$\mathrm{Mat}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ , \ \varphi \mapsto \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

$$\mathrm{App}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})\colon \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) \ , \ A \mapsto \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.

► **Remarque**

La proposition précédente, nous apprend qu'il y a un lien très étroit entre applications linéaires et matrices, en tant qu'éléments. On dispose en effet de deux bijections réciproques l'une de l'autre explicites qui nous permettent de passer de $\mathcal{L}(E, F)$ à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et réciproquement. Nous allons voir souvent dans la suite que ce lien entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est extrêment fécond, il permet de transformer nombre de problèmes sur les applications linéaires en des problèmes sur les matrices et réciproquement. Une des clés pour cela est que les applications $\mathrm{Mat}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\mathrm{App}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ sont non seulement bijectives mais encore linéaires ; ce sont donc des isomorphismes (cf. théorème suivant).

Théorème 3 (Matrices, applications linéaires et opérations sur icelles)

- $\mathrm{Mat}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\mathcal{F})$ et $\mathrm{App}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\mathcal{F})$ et l'addition

$$\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{L}(E,F)\quad \mathrm{Mat}(\varphi+\psi,\mathcal{E},\mathcal{F})=\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})+\mathrm{Mat}(\psi,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

$$\forall\,A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\quad \mathrm{App}(A+B,\mathcal{E},\mathcal{F})=\mathrm{App}(A,\mathcal{E},\mathcal{F})+\mathrm{App}(B,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

- $\mathrm{Mat}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\mathcal{F})$ et $\mathrm{App}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\mathcal{F})$ et la multiplication par un scalaire

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{L}(E,F)\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{K}\quad \mathrm{Mat}(\lambda.\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})=\lambda.\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

$$\forall\,A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{K}\quad \mathrm{App}(\lambda.A,\mathcal{E},\mathcal{F})=\lambda.\mathrm{App}(A,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

- Composition d'applications linéaires versus multiplication de matrices

  Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{G}=(g_1,\dots,g_m)$ une base de G.

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{L}(E,F)\quad\forall\,\psi\in\mathcal{L}(F,G)\quad \mathrm{Mat}(\psi\circ\varphi,\mathcal{E},\mathcal{G})=\mathrm{Mat}(\psi,\mathcal{F},\mathcal{G})\times\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

$$\forall\,A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\quad\forall\,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\quad \mathrm{App}(B\times A,\mathcal{E},\mathcal{G})=\mathrm{App}(B,\mathcal{F},\mathcal{G})\circ\mathrm{App}(A,\mathcal{E},\mathcal{F})$$

- Isomorphismes versus matrices inversibles

  Si $\varphi\colon E\to F$ est un isomorphisme, alors $\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})$ est inversible et :

$$\mathrm{Mat}(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})^{-1}=\mathrm{Mat}(\varphi^{-1},\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

  Si $p=n$ et si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $\mathrm{App}(A,\mathcal{E},\mathcal{F})\colon E\to F$ est un isomorphisme et :

$$\mathrm{App}(A,\mathcal{E},\mathcal{F})^{-1}=\mathrm{App}(A^{-1},\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

► **Exemple 10**

1. Les applications

$$\varphi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ ,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+5y+2z\\x-4y-z\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\psi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\ ,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x-y\\x\\x-4y\end{pmatrix}$$

   sont linéaires et l'on a :

$$\mathrm{Mat}(\varphi,Can_{\mathbb{R}^3},Can_{\mathbb{R}^2})=\begin{pmatrix}1&5&2\\1&-4&-1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathrm{Mat}(\psi,Can_{\mathbb{R}^2},Can_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\1&-4\end{pmatrix}.$$

   On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(\psi\circ\varphi,Can_{\mathbb{R}^3},Can_{\mathbb{R}^3}) &= \mathrm{Mat}(\psi,Can_{\mathbb{R}^2},Can_{\mathbb{R}^3})\times\mathrm{Mat}(\varphi,Can_{\mathbb{R}^3},Can_{\mathbb{R}^2})\\ &= \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\1&-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&5&2\\1&-4&-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&14&5\\1&5&2\\-3&21&6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. On considère à nouveau l'isomorphisme φ et sa réciproque φ^{-1} introduits dans l'exemple 2. D'après les calculs déjà effectués pour cet exemple, on a :

$$\mathrm{Mat}(\varphi,Can_{\mathbb{R}^2},Can_{\mathbb{R}^2})=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathrm{Mat}(\varphi^{-1},Can_{\mathbb{R}^2},Can_{\mathbb{R}^2})=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que l'on a bien $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=I_2$, où I_2 est la matrice identité 2×2.

4 Applications linéaires et théorie de la dimension

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie.

Théorème 4 (Théorème ≪ noyau-image ≫)

Soit $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Alors on a : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(E)$.

► **Exemple 11**

Soit $\varphi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix}$. On démontre que cette application est linéaire. De plus $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc φ est injective (cf. proposition 2).

En effet soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i.e. : $P(1) = P(2) = P(3) = 0$. On a donc

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & = & 0 \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

On résout le système (S) par la méthode du pivot de Gauß pour trouver qu'il ne possède qu'une solution $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Le polynôme P est donc le polynôme nul.

En appliquant le théorème noyau-image, on a donc : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on a donc : $(*) \quad \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Or : $(**) \quad \mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De $(*)$ et $(**)$, on déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$, i.e. : φ est surjective.

On a donc démontré l'assertion : Pour tout $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par les trois points de coordonnées $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(3, y_3)$.

Théorème 5 (En dimensions finies égales, l'injectivité équivaut à la surjectivité)

On suppose ici que E et F sont de dimension finie et que $\dim(E) = \dim(F)$ et on considère une application linéaire $\varphi \colon E \to F$.

L'application φ est injective si et seulement si elle est surjective.

Preuve

- Comme $\dim(E) = \dim(F)$, l'égalité donnée par le théorème noyau-image se réécrit : $(*) \quad \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(F)$.
- Supposons φ injective. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ (cf. proposition 3) et donc $(*)$ donne $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(F)$. Comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F, cela implique que : $\mathrm{Im}(\varphi) = F$. L'application φ est donc surjective.
- Supposons φ surjective. Alors $\mathrm{Im}(\varphi) = F$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(F)$. L'égalité $(*)$ implique alors $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$, i.e. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$. L'application φ est donc injective (cf. proposition 3).

Théorème 6 (Critère d'isomorphie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une application linéaire $\varphi \colon E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une base de F.

Preuve

- On suppose que φ est un isomorphisme. On va montrer que la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une base de F.

  Comme φ est un isomorphisme, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = F$ (proposition 3). Ainsi $\dim(F) = \dim(E) = p$ (théorème 4). Il suffit donc de montrer que la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est libre. En effet $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une famille de vecteurs de F à p éléments et F est de dimension p.

  Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(e_i) = 0_F$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(e_i) = 0_F \quad & \Rightarrow \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = 0_F \qquad \text{(linéarité de } \varphi\text{)} \\
& \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(\varphi) \qquad \text{(définition du noyau de } \varphi\text{)} \\
& \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E \qquad (\varphi \text{ injective donc } \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\} \text{ (proposition 3))} \\
& \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \qquad ((e_1, \dots, e_p) \text{ est une base, donc une famille libre.)}
\end{aligned}$$

- On suppose à présent que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une base de F. On a donc : $(*)$ $\mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) = F$. Montrons que φ est un isomorphisme.

  On a $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ par définition même de l'image de φ. Or $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F (proposition 2), donc :

$$(**) \quad \mathrm{Im}(\varphi) \subset F \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \subset \mathrm{Im}(\varphi).$$

  De $(*)$ et $(**)$, on déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) = F$. On a donc : $(***)$ l'application φ est surjective.

  Comme $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$ est une base de F, on a : $(****)$ $\dim(F) = p = \dim(E)$. De $(***)$, $(****)$ et du théorème 5, on déduit alors que φ est bijective ; c'est donc un isomorphisme de E sur F.

Q.E.D.

▶ Exemple 12

L'application $\varphi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P''(0) \end{pmatrix}$, où P' (resp. P'') est le polynôme dérivé (resp. dérivé seconde) de P, est linéaire. C'est de plus un isomorphisme, car les images des vecteurs de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par φ sont :

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \varphi(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5 Rang d'une application linéaire et rang d'une matrice

Définition 6 (Rang d'une application linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Le *rang de* φ, noté $\mathrm{rang}(\varphi)$, est défini par : $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

▶ Remarque

Les notations sont celles de la définition ci-dessus. D'après le théorème noyau-image, si l'on connaît la dimension de E et la dimension du noyau de φ, alors on connaît le rang de φ : $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.

Définition 7 (Rang d'une matrice)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de la matrice A, noté $\mathrm{rang}(A)$, est le rang du système linéaire homogène :

$$(S_A): \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

canoniquement associé à A.

► Remarque

Pour déterminer le rang d'un système linéaire (S), on commence par le transformer en un système linéaire échelonné (S') équivalent, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß. Le rang du système (S) est par définition le nombre de lignes de (S') dont le membre de gauche n'est pas nul.

Ce dernier est indépendant du choix de (S'). En particulier le second membre du système (S) n'influe pas sur le rang de (S).

On peut donc ≪ échelonner la matrice A elle-même ≫, au moyen de l'algorithme du pivot de Gauß, pour calculer son rang.

► Exemple 13

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrons que $\mathrm{rang}(A) = 2$, en utilisant la méthode expliquée dans la remarque précédente.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}(A) &= \mathrm{rang} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\
&= \mathrm{rang} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{5} L_2) \\
&= 2 \qquad \text{(La matrice ci-dessus est échelonnée.)}
\end{aligned}$$

Théorème 7 (Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et soit

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

On lui associe sa matrice transposée

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

On a : $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$.

► Exemple 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer le rang de A qui, d'après le théorème ci-dessus, est aussi le rang de ${}^tA$. Deux stratégies s'offrent à nous : échelonner A ou échelonner ${}^tA$.

Il est plus rapide d'échelonner la matrice ${}^tA$ que la matrice A, avec l'algorithme du pivot de Gauß, vu auparavant. En effet, dans la version de l'algorithme donnée, les opérations élémentaires que l'on applique portent sur les lignes : *a priori* ≪ moins il y a de lignes, moins il y a de calculs ≫.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(A) &= \operatorname{rang}({}^tA)\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4\\ 0 & -6 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 7 & 1 & -10\end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)\\
&= 3 \qquad \text{(La matrice ci-dessus est échelonnée.)}
\end{aligned}$$

Théorème 8 (Rang d'une application linéaire versus rang d'une matrice)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ désigne une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

- Soit $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Alors on a : $\operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}(\operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}))$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. Alors on a : $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\operatorname{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}))$.

► **Exemple 15**

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+2y-z\\ 2x+y-3z\\ x+y-2z\end{pmatrix}$. Cette application est linéaire et

$$\operatorname{Mat}(\varphi, Can_{\mathbb{R}^3}, Can_{\mathbb{R}^3})) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice A de l'exemple 13 dont on a calculé le rang. Celui-ci vaut 2. On a donc :

$$\operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}(\operatorname{Mat}(\varphi, Can_{\mathbb{R}^3}, Can_{\mathbb{R}^3})) = 2.$$

On en déduit que φ n'est ni surjective, ni injective (théorème 4).