Notes sur les systèmes linéaires

Table des matières

1 Forme générale d'un système linéaire, systèmes équivalents

Définition (système linéaire) : Un système linéaire à p équations et n inconnues est un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{array}\right.$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les inconnues du système, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pn}$ sont des réels, appelés coefficients du système, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont des réels qui forment le second membre du système.

Remarque : On peut écrire un système sous forme matricielle. Ce lien système $\leftrightarrow$ matrices est très riche et sera retravaillé intensivement plus tard. Il n'est pas évoqué dans ce texte.

Exemple : Le système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 7 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

a 2 lignes, 3 inconnues, des coefficients sont $\begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{12} = -1 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = -1 & a_{22} = 3 & a_{23} = 1 \end{array}$ et son second membre $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problématique : On souhaite déterminer le nombre de solution(s) et l'ensemble solution d'un système linéaire donné.

Remarque clé : Certains systèmes sont très simples à résoudre : les systèmes échelonnés. La définition précise d'un système échelonné sera donnée plus loin. Dans un premier temps, on peut penser à un système échelonné comme un système qui a une forme d'escalier.

Exemple (résolution d'un système échelonné) : Soit le système $(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$.

Ce système est échelonné. Pour le résoudre on procède comme suit « en remontant ».

De la ligne 3, on déduit que $x_3 = 2$.
De $x_3 = 2$ et de la ligne 2, on déduit que $3x_2 = 1 + x_3 = 1 + 2$ et donc $x_2 = 1$.

De $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et de la ligne 1, on déduit que $x_1 = -3x_2 + 2x_3 = -3 \times 1 + 2 \times 2$. Donc $x_1 = 1$.
(S) possède donc une solution unique $(1; 1; 2)$.

Définition : Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits équivalents s'ils possèdent le même ensemble de solutions. On note $(S_1) \Longleftrightarrow (S_2)$ pour dire que les systèmes (S_1) et (S_2) sont équivalents.

Remarque : Pour solutionner le problème que l'on considère, on va chercher à *transformer le système que l'on considère en un système échelonné équivalent (qui est plus « simple » à résoudre).*

2 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sont des transformations des lignes d'un système. Elles sont de trois types. On va parallèlement les expliquer pour un système général (S_g) et les illustrer sur un système exemple (S_e).

$$(S_g) \ : \ \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p & (L_p) \end{array} \right.$$

$$(S_e) \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccccl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & & (L_1) \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & & (L_2) \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & & (L_3) \end{array} \right.$$

Opération élémentaire 1 : multiplication d'une ligne par un réel non nul

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. La ligne obtenue en multipliant la ligne

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad (L_i)$$

du système par k est notée $k(L_i)$. C'est la ligne

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \ldots + ka_{in}x_n = kb_i \qquad k(L_i).$$

On note $(L_i) \leftarrow k(L_i)$ (on met $k(L_i)$ à la place de (L_i)) la transformation qui consiste à remplacer la ligne (L_i) par la ligne $k(L_i)$ dans le système.

Sur (S_e)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & & (L_1) \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 & & (L_2) \leftarrow 3(L_2) \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & & (L_3) \end{array} \right.$$

Opération élémentaire 2 : échange de deux lignes

On note $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$ (on met (L_i) à la place de (L_j) et réciproquement) la transformation qui consiste à échanger les deux lignes (L_i) et (L_j) du système.

Sur (S_e)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & & \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & & (L_1) \leftrightarrow (L_3) \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & & \end{array} \right.$$

Opération élémentaire 3 : addition à une ligne d'un multiple d'une autre

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient i et j deux indices de lignes distincts.
On note $(L_i) + \lambda(L_j)$ l'équation

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})x_1+(a_{i2}+\lambda a_{j2})x_2+\ldots+(a_{in}+\lambda a_{jn})x_n = b_i+\lambda b_j$$

et $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ (on met $(L_i) + \lambda(L_j)$ à la place de (L_i)) la transformation qui consiste à remplacer la ligne (L_i) par la ligne $(L_i) + \lambda(L_j)$ dans le système.

Sur (S_e)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 & & (L_1) \\ 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 & & (L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1) \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & & (L_3) \end{array} \right.$$

Théorème 1 (propriété des opérations élémentaires) : Toute opération élémentaire

1. échange $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$,
2. multiplication par un réel non nul $(L_i) \leftarrow k(L_i)$ $(k \neq 0)$

3. transformation $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ $(i \neq j)$

transforme un système en un système équivalent.

Remarques

1. Ce théorème est la clé pour pouvoir transformer un système quelconque en un système échelonné équivalent (en un système équivalent que l'on sait résoudre simplement donc).
2. Si on fixe un indice de ligne et que l'on effectue successivement les opérations

$$\begin{array}{c} (L_1) \leftarrow (L_1) + \lambda_1(L_i) \\ \vdots \\ (L_{i-1}) \leftarrow (L_{i-1}) + \lambda_{i-1}(L_i) \\ (L_{i+1}) \leftarrow (L_{i+1}) + \lambda_{i+1}(L_i) \\ \vdots \\ (L_p) \leftarrow (L_p) + \lambda_p(L_i) \end{array}$$

sur les lignes d'indices différents de i, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_p$ sont des réels, alors on obtient un système équivalent au système de départ (on répète $(p-1)$ fois une opération élémentaire). On a donc :

$$(S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} (L_1) + \lambda_1(L_i) \\ \vdots \\ (L_{i-1}) + \lambda_{i-1}(L_i) \\ (L_i) \\ (L_{i+1}) + \lambda_{i+1}(L_i) \\ \vdots \\ (L_p) + \lambda_p(L_i) \end{array} \right. .$$

Ce type de transformation est à la base d'une méthode, appelée « pivot de Gauß » , qui permet de transformer un système quelconque en un système échelonné équivalent. On observera que la ligne (L_i) reste inchangée ; on dit qu'elle sert de pivot.

Attention : Dans la dernière remarque ci-dessus, on a appliqué plusieurs transformations élémentaires simultanément. *C'est le seul cas où on s'autorisera à effectuer en même temps plusieurs opérations élémentaires, dans tous les autres cas on appliquera les opérations élémentaires une par une, successivement.*

En effet appliquer simultanément certaines opérations élémentaires peut transformer un système en un système non équivalent. Par exemple, si l'on applique simultanément les tranformations $(L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2)$ et $(L_2) \leftarrow (L_2) + (L_1)$ au système (S) : $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$ (qui a pour unique solution $(0;0)$) on obtient le système $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$ qui a une infinité de solutions (son ensemble solution est $\{(x;-x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$). Ces deux systèmes ne sont donc pas équivalents.

3 Transformation d'un système en un système échelonné équivalent et rang

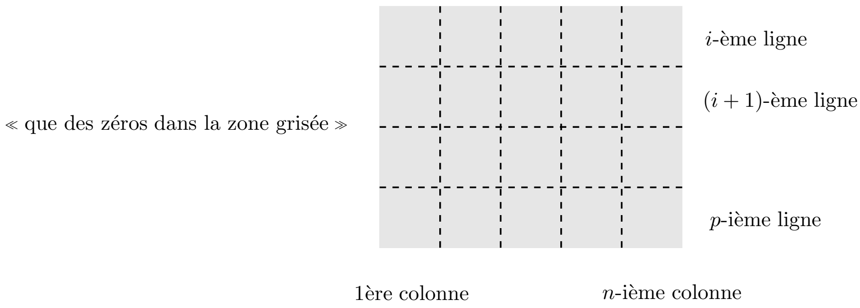
Définition formelle d'un système échelonné : Soit (S) un système linéaire à p équations et n inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \quad (L_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p & \quad (L_p) \end{array} \right.$$

On dira que (S) est échelonné si pour chaque indice de ligne i l'une des conditions suivantes est vérifiée.

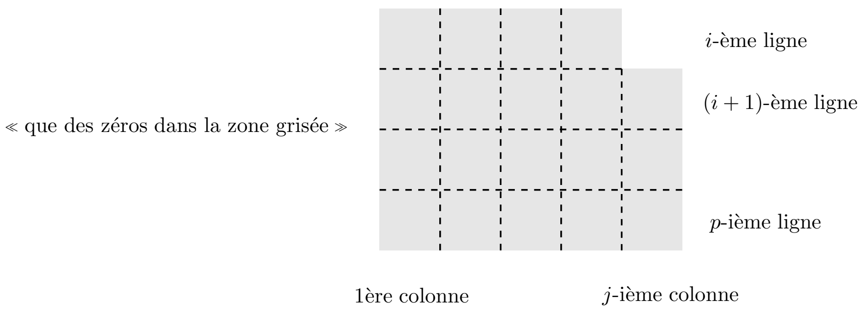
- Cas où les $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ sont tous nuls.

  Les coefficients
$$\begin{array}{ccc} a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \ldots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{array}$$
  sont tous nuls.



- Cas où les $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ ne sont pas tous nuls.

  Les coefficients
$$\begin{array}{cccc} a_{i1} & \ldots & a_{i(j-1)} & \\ a_{(i+1)1} & \ldots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{p(j-1)} & a_{pj} \end{array}$$
  sont tous nuls, où j est le premier indice de colonne tel que $a_{ij} \neq 0$.



Définition moins formelle d'un système échelonné : Soit le système
$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p & (L_p) \end{array}\right.$$
Le système (S) est dit échelonné si chaque ligne de la matrice de ses coefficients
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

- $\star$ est nulle, si la précédente est nulle,
- $\star$ débute par davantage de 0 que la ligne précédente, si la ligne précédente n'est pas nulle.

Exemples et contre-exemple : Les systèmes (S_1) et (S_2) sont échelonnés, le système (S_3) ne l'est pas.
$$(S_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 2 \\ 3z & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_2)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 7x+2y+z & = & 1 \\ 2y-z & = & 0 \\ 0 & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_3)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} -x+6y-9z & = & -3 \\ -z & = & 2 \\ 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition (rang d'un système échelonné) : Le rang r d'un système échelonné à p équations et n inconnues est égal au nombre d'équations qui n'ont pas un premier membre nul. (On a donc $0 \leq r \leq p$.) « r est donc égal au nombre de marches si le symbole d'égalité n'est pas atteint, et est égal au nombre de marches nécessaires pour atteindre le premier symbole d'égalité s'il est atteint. »

Exemples : On considère à nouveau les deux systèmes échelonnés (S_1) et (S_2) donnés en exemple ci-dessus. Le rang de (S_1) est 3 et le rang de (S_2) est 2.

Remarques

1. Comme on le verra plus loin, le rang d'un système renseigne sur le nombre de solution(s) de celui-ci (cf. Théorèmes 3, 4 et 5).
2. Le rang d'un système échelonné ne dépend pas de son second membre.

Propriété du rang d'un système échelonné : $r \leq n$ et $r \leq p$.

Théorème 2

1. Tout système (S) à p équations et n inconnues peut être transformé par une suite d'opérations élémentaires en un système échelonné (S') à p équations et n inconnues équivalent.

2. Soient (S_1) et (S_2) deux systèmes échelonnés à p équations et n inconnues. Si $(S_1) \iff (S_2)$, alors (S_1) et (S_2) ont même rang.

Remarque : On va voir, sur l'exemple suivant, un algorithme, appelé algorithme du pivot de Gauß, qui va nous permettre de transformer tout système en un système échelonné équivalent.

Exemple : Soit (Σ) le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 8 \\ x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & - & 10z & = & 2 \end{array}\right.$. On transforme (Σ) en un système échelonné équivalent, à l'aide d'opérations élémentaires, comme suit.

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 8 \\ x & + & y & - & 10z & = & 2 \end{array}\right. \qquad (L_1) \leftrightarrow (L_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ & & -5y & - & 5z & = & 4 \\ & & -3y & - & 15z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ & & -y & - & z & = & \dfrac{4}{5} \\ & & -3y & - & 15z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (L_2) \leftarrow \frac{1}{5}(L_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ & & -y & - & z & = & \dfrac{4}{5} \\ & & & - & 12z & = & -\dfrac{12}{5} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{(ce système est échelonné)} \\ \\ (L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_2) \end{array}$$

Définition (rang d'un système quelconque) : Soit (S) un système à p équations et n inconnues. Alors (S) est équivalent à un système échelonné (S') à p équations et n inconnues et le rang de (S), noté r, est le rang du système (S'). D'après le théorème 2, r ne dépend pas du choix de (S').

Exemple : On considère à nouveau l'exemple précédent du système (Σ).

Le système échelonné $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ & & -y & - & z & = & 4/5 \\ & & & - & 12z & = & -12/5 \end{array}\right.$ est équivalent à (Σ) et a pour rang 3. Par conséquent le rang de (Σ) lui-même est 3.

Propriété du rang d'un système quelconque : $r \leq n$ et $r \leq p$.

Remarques

1. En pratique, pour déterminer le rang d'un système (S) donné, on le transforme, par des opérations élémentaires, en un système échelonné équivalent (S') et on compte alors le nombre d'équations de (S') qui ont un premier membre non nul.
2. Le rang d'un système ne dépend pas de son second membre.

4 Nombre de solution(s) d'un système

Définition (système homogène) : Un système est dit homogène si son second membre est nul.

Exemple : Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & + & z & = & 0 \\ 7x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ est homogène.

Remarque : Un système homogène à p équations et n inconnues a toujours une solution : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Théorème 3 (nombre de solution(s) d'un système homogène) : Soit (S) un système homogène à p équations et n inconnues. On note r le rang de (S).

1. Si $n = r$, alors (S) admet une unique solution $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Si $n > r$, alors (S) admet une infinité de solutions (le nombre de « paramètres » est donné par $n - r$).

Exemple : Le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 7y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ est un système homogène qui a une infinité de solutions. En effet, son rang r est plus petit que $p = 2$, le nombre de ses lignes. On a donc $n = 3 > r$, où n est le nombre d'inconnues.

Théorème 4 (système de Cramer) : Soit (S) un système (pas nécessairement homogène) à n équations et n inconnues. Si son rang r est égal à n, (S) est appelé « système de Cramer », et il possède une solution unique.

Exemple : Le système (Σ) considéré ci-avant est un système de Cramer.

Théorème 5 (nombre de solution(s) d'un système quelconque) : Soit (S) un système (pas nécessairement homogène) à p équations et n inconnues de rang r.

1. Si $n = r$, alors (S) possède soit 0 soit 1 solution.
2. Si $n > r$, alors (S) possède soit 0 soit une infinité de solutions (le nombre de « paramètres » est donné par $n - r$).

Remarque : Dans tous les cas, un système possède soit 0, soit 1, soit une infinité de solution(s).