L.E.G.T.A. Le Chesnoy
D. Blottière

Notes sur les nombres complexes et la trigonométrie

Table des matières

1 Trois aspects des nombres complexes

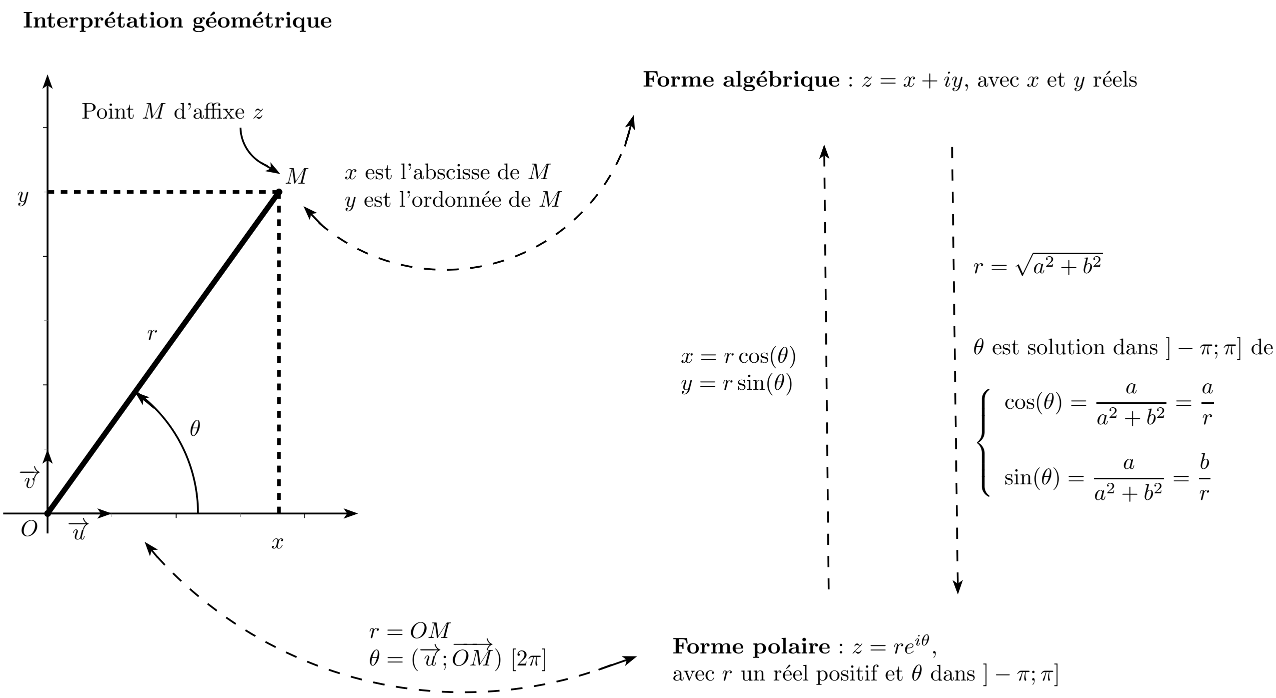
On fixe un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du plan et on oriente le plan dans le sens direct. Un nombre complexe z a trois aspects distincts (forme algébrique, forme trigonométrique, interprétation géométrique) et pourtant très liés.

Forme algébrique : Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. a est appelé partie réelle de z et b partie imaginaire de z.

Forme trigonométrique : Tout nombre complexe z non nul s'écrit de façon unique sous la forme $z = re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$. $e^{i\theta}$ est défini par l'égalité $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. r est appelé module de z et est noté $|z|$, θ est appelé argument de z et est noté $\arg(z)$.

Interprétation géométrique : À chaque point M du plan, on fait correspondre un unique nombre complexe z, appelé affixe de M. De plus, tout nombre complexe est l'affixe d'un unique point du plan.

2 Passage d'un aspect à l'autre



Remarque : Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe donné sous forme algébrique, il est utile de bien connaître les valeurs des cosinus et sinus des angles remarquables (e.g. : $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$) ou de savoir les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

3 Formules de trigonométrie et propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$

Conséquences de la définition de cosinus et sinus

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \quad$ et $\quad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z} \qquad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \quad$ et $\quad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$
3. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad$ et $\quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
4. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$

Formules d'addition

1. $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \qquad \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$

2. $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \qquad \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$
3. $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \qquad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$
4. $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \qquad \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$

Formules de duplication

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

Les formules de duplication se déduisent des formules d'addition (en posant $\theta = \theta_1 = \theta_2$ dans la formule ad hoc).

Transformation d'un cosinus en sinus et réciproquement

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$

Ces formules de transformation peuvent se déduire des formules d'addition (en posant $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \theta$ dans la formule ad hoc). On peut les retrouver en utilisant le cercle trigonométrique.

Propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$

1. $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \qquad e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Remarque : La formule 1 ci-dessus se déduit directement des formules d'addition.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \qquad (\text{définition de } e^{i\theta_1} \text{ et } e^{i\theta_2}) \\
&= [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)] + i[\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)] \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \qquad (\text{formules 1 et 3 de duplication}) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (\text{définition de } e^{i(\theta_1+\theta_2)})
\end{aligned}$$

4 Conjugaison complexe

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés algébriques de la conjugaison

1. $\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \overline{z} = z$ si $z \in \mathbb{R}$, en particulier $\overline{0} = 0$ et $\overline{1} = 1$.
2. $\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \overline{\overline{z}} = z$.
3. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2}$
4. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
5. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
6. $\forall\, z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}^* \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
7. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{Z} \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
8. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Caractérisation des réels et des imaginaires purs

1. $\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
2. $\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad z$ imaginaire pur (i.e. $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$) $\Longleftrightarrow -z = \overline{z}$.

Conjugaison et symétrie par rapport à l'axe des abscisses

Soit M un nombre complexe d'affixe z. Alors le point du plan d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

5 Nombres complexes et vecteurs du plan

Définition (affixe d'un vecteur) : Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan et soient A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{w}$. On note z_A et z_B les affixes respectives de A et B. L'affixe de $\overrightarrow{w}$, notée $z_{\overrightarrow{w}}$, est le nombre complexe défini par

$$z_{\overrightarrow{w}} = z_B - z_A.$$

Ce nombre complexe est indépendant du choix de A et B. On a en particulier

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

6 Propriétés du module

Module et opérations dans $\mathbb{C}$

1. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)
2. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
3. $\forall\, z_1 \in \mathbb{C},\, z_2 \in \mathbb{C}^* \qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
4. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{Z} \qquad |z^n| = |z|^n$

Module et longueurs

1. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan. Alors $||\overrightarrow{w}|| = |z_{\overrightarrow{w}}|$.
2. Soient M_1 et M_2 deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2, alors $M_1M_2 = ||\,\overrightarrow{M_1M_2}|| = |z_2 - z_1|$.

7 Propriétés de l'argument

Exemples d'arguments

1. $\arg(1) = \arg(8) = \arg(\sqrt{2}) = 0$ et plus généralement $\arg(a) = 0$ si $a \in \mathbb{R}^{+*}$
2. $\arg(-3) = \arg(-9) = \arg(-\sqrt{13}) = \pi$ et plus généralement $\arg(a) = \pi$ si $a \in \mathbb{R}^{-*}$
3. $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

Argument et opérations dans $\mathbb{C}$

1. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \qquad \arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$
2. $\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{Z} \qquad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
3. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \qquad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$

Argument et angles

1. Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{w_1}}$ et $z_{\overrightarrow{w_2}}$. Alors $(\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_2}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}\right) \quad [2\pi]$.
2. Soient A, B, C des points du plan, tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Alors $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$.

8 Remarque sur la forme trigonométrique d'un produit ou d'un quotient

Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls ayant comme formes polaires $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, alors

- la forme polaire de z_1z_2 est $r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
- la forme polaire de $\dfrac{1}{z_2}$ est $\dfrac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}$,
- donc la forme polaire de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est $\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

La forme polaire est bien adaptée aux problèmes qui comportent des multiplications ou des divisions de nombres complexes.

9 Formules de Moivre et formules d'Euler

Formules de Moivre

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \qquad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \qquad (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

Formules d'Euler

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
2. $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Toutes ces formules se déduisent immédiatement des relations $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$.

Une application des formules d'Euler : la linéarisation de polynômes trigonométriques

Les formules d'Euler permettent de linéariser des produits du type $\cos^n(\theta)$, $\sin^m(\theta)$ ou $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de les transformer en somme de termes du type $a\cos(\alpha\theta)$ ou $b\sin(\beta\theta)$, où $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ces transformations sont particulièrement précieuses dans la recherche de primitives.

Exemple de linéarisation :

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \qquad \text{(formule d'Euler)} \\
&= \frac{1}{2^4}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\
&= \frac{1}{2^4}(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) \qquad \text{(formule du binôme)} \\
&= \frac{1}{2^4}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6) \\
&= \frac{1}{2^4}(2\cos(4\theta) + 4 \times 2\cos(2\theta) + 6) \qquad \text{(formule d'Euler)} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

10 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Théorème (solution(s) dans $\mathbb{C}$ de $ax^2 + bx + c = 0$)

Soit un trinôme du second degré à coefficients réels $ax^2 + bx + c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ donc), et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles : $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Application : L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.

11 Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré

Théorème : Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré à coefficients réels. On a l'équivalence :

$$(x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont solutions de } ax^2+bx+c=0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ et } x_1x_2=\frac{c}{a}).$$

Deux applications

1. Connaissant une racine de $ax^2+bx+c=0$ (par exemple une « évidente »), on en déduit l'autre, à l'aide de c et a.

   Exemple : On remarque que 1 est solution de $2x^2+43x-45=0$. Comme le produit des racines vaut $-\frac{45}{2}$, on en déduit, sans calcul, que $-\frac{45}{2}$ est l'autre racine.

2. Résolution de systèmes du type $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{array}\right.$ d'inconnue (x_1,y_2), où S et P sont des réels donnés.

   D'après le théorème, x_1 et x_2 sont solutions de $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{array}\right.$ si et seulement si x_1 et x_2 sont racines de x^2-Sx+P. On est donc ramené à résoudre une équation du second degré à coefficients réels, ce que l'on sait faire.

   Exemple :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=15 \\ x_1x_2=26 \end{array}\right. &\Longleftrightarrow \quad x_1 \text{ et } x_2 \text{ solutions de } x^2-15x+26=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_1=2 \text{ et } x_2=13) \text{ ou } (x_1=13 \text{ et } x_2=2).
\end{aligned}$$

12 Équations trigonométriques

Cas d'égalité de cosinus, cas d'égalité de sinus

Soient x et a deux nombres réels.

1. $\cos(x)=\cos(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x=-a \quad [2\pi] \end{array}\right.$

2. $\sin(x)=\sin(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x=\pi-a \quad [2\pi] \end{array}\right.$

Ces résultats peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

Étude de l'équation $a\cos(x)+b\sin(x)=c$, avec $a,b,c\in\mathbb{R}$, avec a et b non nuls, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

- Méthode

  On introduit le nombre complexe $z=a+ib$ que l'on écrit sous forme trigonométrique : $z=re^{i\theta}$.

  - En pratique, on peut souvent déterminer θ explicitement, mais pas toujours. Si on ne peut pas, on continue la résolution en gardant simplement θ, défini comme étant l'argument de z.

  - On a donc $a=r\cos(\theta)$ et $b=r\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}
a\cos(x)+b\sin(x)=c &\Longleftrightarrow \frac{a}{r}\cos(x)+\frac{b}{r}\sin(x)=\frac{c}{r} \\
&\Longleftrightarrow \cos(\theta)\cos(x)+\sin(\theta)\sin(x)=\frac{c}{r} \\
&\Longleftrightarrow \cos(x-\theta)=\frac{c}{r}
\end{aligned}$$

En pratique, $\dfrac{c}{r}$ est souvent une valeur remarquable de cosinus et on est donc ramené à un cas d'égalité de deux cosinus, que l'on sait traiter.

- Exemple : Résolution de $\sqrt{6}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{2}$.

On introduit le nombre complexe $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ et on l'écrit sous forme trigonométrique.

$$|z| = 2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{2} &\iff \frac{\sqrt{6}}{|z|}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{|z|}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{|z|} \\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \qquad x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \qquad x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \qquad x = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \qquad x = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $\sqrt{6}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{2}$ est donc

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$