Chapitre XI

Intégrales généralisées

1 Définition et premières propriétés de l'intégrale généralisée

Définition 1 (Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la limite :

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$$

   existe et est finie. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

2. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ le nombre réel $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt$.

▶ **Exemple 1**

1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

   En effet, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{t^2}\,dt$ est divergente.

   En effet, pour tout $x \in]-\infty, 0[$:

$$\int_{-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{-1}^x = -\frac{1}{x} - 1$$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt = +\infty$.

▶ **Remarque**

La définition précédente admet un analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. On l'énonce ci-après.

Définition 2 (L'intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$)

Soit $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la limite :

$$\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt$$

existe et est finie. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

2. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ le nombre réel $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt$.

► **Exemple 2**

1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

   En effet, pour tout $x \in]-\infty, 0]$:

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_x^0 = -\arctan(x)$$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

2. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.

   En effet, pour tout $x \in]0, 2]$:

$$\int_x^2 \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_x^2 = \ln(2) - \ln(x)$$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^2 \frac{1}{t}\,dt = +\infty$.

Théorème 1 (Relation de Chasles pour les intégrales généralisées)

1. Soit $f\colon [a, c[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, c[$, où $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $b \in [a, c[$.
   (a) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_b^c f(t)\,dt$ est convergente.
   (b) Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente, alors on a :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

2. Soit $f\colon]a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, c]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $b \in]a, c]$.
   (a) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
   (b) Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente, alors on a :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Preuve

On démontre la première assertion, la deuxième se montrant de même. Soit $x \in [b, c[$. D'après la relation de Chasles, pour l'intégrale (non généralisée), on a :

$$(*) \qquad \int_a^x f(t)\, dt = \underbrace{\int_a^b f(t)\, dt}_{\substack{\text{constante réelle} \\ \text{indépendante de } x}} + \int_b^x f(t)\, dt.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to c} \int_a^x f(t)\, dt$ existe et est finie si et seulement si $\lim\limits_{x\to c} \int_b^x f(t)\, dt$, d'où l'assertion 1.(a). Dans le cas où ces limites existent, en faisant tendre x vers c dans $(*)$, on obtient :

$$\underbrace{\lim_{x\to c} \int_a^x f(t)\, dt}_{\int_a^c f(t)\, dt} = \int_a^b f(t)\, dt + \underbrace{\lim_{x\to c} \int_b^x f(t)\, dt}_{\int_b^c f(t)\, dt}$$

i.e. l'assertion 1.(b).

► **Exemple 3 :** On a vu, dans l'exemple 1, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente et que :

$$(*) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

De la relation de Chasles pour les intégrales généralisées, on déduit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente et que :

$$(**) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

De plus, on a :

$$(***) \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

De $(*)$, $(**)$ et $(***)$, on déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Les résultats obtenus ici (convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ et égalité $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$) peuvent être démontrés sans appliquer la relation de Chasles pour les intégrales généralisées, en suivant la même démarche que dans le 1. de l'exemple 1.

Définition 3 (L'intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$)

Soit $f :]a, c[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, c[$, où $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $b \in]a, c[$.

1. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ est convergente si les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_b^c f(t)\, dt$ sont convergentes. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ est divergente.
2. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ est convergente, alors on note $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt + \int_b^c f(t)\, dt$.

On peut montrer, à l'aide de la relation de Chasles pour les intégrales généralisées, que les définitions 1 et 2 ne dépendent pas du nombre $b \in]a, c[$.

► **Exemple 4 :** On sait que :

(*) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ (cf. exemple 1) ;

(**) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ (cf. exemple 2).

On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi.$$

Théorème 2 (Résultat fondamental : dichotomie dans le cas positif)

1. Soit $f\colon [a,c[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,c[$, où $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que l'hypothèse (H_1) suivante est satisfaite.
$$(H_1) \quad \forall\, x \in [a,c[,\ f(x) \geq 0.$$
Soit la fonction F définie par :
$$F\colon [a,c[\to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$
   (a) Si la fonction F est majorée, alors $\lim\limits_{x\to c} F(x)$ existe et est finie, i.e. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente.
   (b) Si la fonction F n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to c} F(x) = +\infty$ et donc : l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est divergente.
2. Soit $f\colon]a,c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,c]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On suppose que l'hypothèse (H_2) suivante est satisfaite.
$$(H_2) \quad \forall\, x \in]a,c],\ f(x) \geq 0.$$
Soit la fonction F définie par :
$$F\colon]a,c] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_x^c f(t)\,dt.$$
   (a) Si la fonction F est majorée, alors $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ existe et est finie, i.e. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente.
   (b) Si la fonction F n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to a} F(x) = +\infty$ et donc : l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est divergente.

► Remarque

L'hypothèse (H_1) peut-être affaiblie. On peut la remplacer par l'hypothèse plus générale :

$$(H_1') \quad \forall\, b \in [a,c[,\ \forall\, x \in [a,b],\ f(x) \geq 0, \text{ sauf éventuellement pour un nombre fini de points de } [a,b].$$

sans que la conclusion du théorème ne soit modifiée. De même, on peut remplacer la condition (H_2) par :

$$(H_2') \quad \forall\, b \in]a,c],\ \forall\, x \in [b,c],\ f(x) \geq 0, \text{ sauf éventuellement pour un nombre fini de points de } [b,c].$$

► Remarque

Ce théorème est admis. On souligne simplement que l'hypothèse (H_i) ou (H_i') $(i \in \{1,2\})$ implique la croissance de la fonction F. C'est un point important de la démonstration. Le théorème précédent est à rapprocher du théorème d'analyse suivant : toute suite croissante majorée converge.

2 Interprétation géométrique de l'intégrale généralisée

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'unité d'aire est l'aire du carré de côté OI, où I est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$.

On a vu, dans le cours de calcul intégral, une interprétation géométrique du nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine du plan délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ s'étend au cas de l'intégrale généralisée d'une fonction continue et positive sur $[a,b[$ (respectivement sur $]a,b]$, sur $]a,b[$). Pour alléger l'étude, on ne considère ici que le cas d'une fonction continue et positive sur un intervalle du type $[a,+\infty[$. Les autres cas se traitent de façon analogue.

Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$. Ce domaine étant « ouvert à droite », son aire peut être finie ou infinie.
D'après le théorème 2, on sait que la limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$

existe et qu'elle est soit égale à un nombre réel, soit égale à $+\infty$. Dans les deux cas, cette limite coïncide avec l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
Ainsi, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$ est finie (i.e. si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente), on a l'égalité de nombres réels :

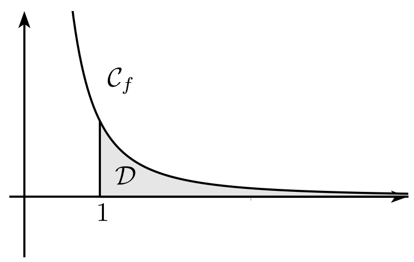
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt = \text{Aire de } \mathcal{D}.$$

► **Exemple 5 :** L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et on a $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt = 1$.

En effet, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1$. Ainsi l'aire du domaine $\mathcal{D}$ du plan délimité par la courbe représentative de la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ est 1.



3 Trois exemples d'études d'intégrales généralisées

Pour étudier une intégrale généralisée donnée, on peut utiliser les techniques données dans le cours de calcul intégral pour effectuer des calculs :

- intégration directe (à l'aide d'une primitive usuelle) ;
- intégration par parties ;
- intégration par changement de variable.

▶ **Exemple 6 :** Étude d'une intégrale généralisée par intégration directe.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1}{t^2-1}\,dt$ est divergente. Pour le démontrer, on commence par vérifier[1] que :

$$\forall t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[\qquad \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

On en déduit que pour tout $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} \frac{1}{t^2-1}\,dt &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|t-1|) - \ln(|t+1|)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) - \ln\left(\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right|\right) + \ln\left(\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right|\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1-x) - \ln(x+1) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right).
\end{aligned}$$

De ce calcul et de :

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(x+1) = \ln(2) \qquad \text{(continuité de ln en 2)}$$

on déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} \frac{1}{t^2-1}\,dt = -\infty.$$

▶ **Exemple 7 :** Étude d'une intégrale généralisée à l'aide d'une intégration par parties.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$. Pour le montrer, on va effectuer une intégration par parties, pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,dt$, pour $x \in]0,1]$.
Soient u et v les fonctions définies sur $]0,1]$ par :

$$\forall\, t \in]0,1] \quad u(t) = t \text{ et } v(t) = \ln(t).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on a :

$$\forall\, t \in]0,1] \quad u'(t) = 1 \text{ et } v'(t) = \frac{1}{t}.$$

Soit $x \in]0,1]$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_x^1 \ln(t)\,dt = \int_x^1 \underbrace{1}_{u'(t)}\,\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\,dt = [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 t\,\frac{1}{t}\,dt = -x\ln(x) - [t]_x^1 = -x\ln(x) - 1 + x.$$

1. La décomposition utilisée ici se généralise comme suit. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x+a}.$$

En pratique, pour déterminer α et β, on écrit $\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x+a}$ sous la forme d'une seule fraction ayant pour dénominateur $(x-a)(x+a) = x^2-a^2$ et ≪ on identifie les coefficients des numérateurs ≫, qui sont des polynômes en x. On obtient alors un système linéaire 2×2 que l'on résout.

De ce calcul et de :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \qquad \text{(croissances comparées)}$$

on déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \ln(t)\, dt = -1.$$

► **Exemple 8 :** Étude d'une intégrale généralisée à l'aide d'un changement de variable.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(u)}\, du$ est divergente. Pour le voir, on va calculer, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\cos(u)}\, du$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$.

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. On remarque que :

$$(*) \qquad \begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\cos(u)}\, du &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\cos^2(u)} \cos(u) du \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{1-\sin^2(u)} \cos(u) du. \qquad (\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1 \text{ donc } \cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)). \end{aligned}$$

La dernière intégrale est une expression du type $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\, du$, où :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \beta = x \quad ; \quad f :]-1,1[\to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto \frac{1}{1-t^2} \quad ; \quad \varphi \colon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ u \mapsto \sin(u).$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, x\right]$. On peut donc appliquer la formule du changement de variable. Pour effectuer le changement de variable $t = \sin(u)$, on calcule :

$$dt = \sin'(u)du = \cos(u)du \qquad ; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc :

$$(**) \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{1-\sin^2(u)} \cos(u)du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin(x)} \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que :

$$(***) \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\cos(u)}\, du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin(x)} \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

Or on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1^- \qquad \text{(continuité de sin en } \frac{\pi}{2}) \\ \\ \displaystyle\lim_{X \to 1^-} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X} \frac{1}{1-t^2}\, dt = -\lim_{X \to 1^-} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X} \frac{1}{t^2-1}\, dt = +\infty \qquad \text{(cf. exemple 6)} \end{array} \right.$$

et donc (composition de limites) on voit que :

$$(****) \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin(x)} \frac{1}{1-t^2}\, dt = +\infty.$$

De $(***)$ et $(****)$, on déduit alors que :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\cos(u)}\, du = +\infty.$$

4 Le critère de Riemann

Théorème 3 (Critère de Riemann)

Soit α un nombre réel.

1. Si $\alpha < 1$, alors :
   (a) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente ;
   (b) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est divergente .
2. Si $\alpha > 1$, alors :
   (a) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est divergente ;
   (b) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente .
3. Si $\alpha = 1$, alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ sont divergentes.

Preuve

- Cas où $\alpha \neq 1$

On suppose que $\alpha \neq 1$. Alors une primitive de la fonction

$$f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \ ,\ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$$

sur $]0,+\infty[$ est donnée par la fonction :

$$F_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \ ,\ t \ \mapsto \frac{1}{1-\alpha}\ t^{1-\alpha}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$(*) \qquad \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\ t^{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right).$$

$$(**) \qquad \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\ t^{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right).$$

De $(*)$, on déduit que :

$$\text{si } \alpha < 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R} \qquad (\text{car } 1-\alpha > 0)$$

$$\text{si } \alpha > 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) = +\infty \qquad (\text{car } 1-\alpha < 0)$$

et de $(**)$, on déduit que :

$$\text{si } \alpha < 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty \qquad (\text{car } 1-\alpha > 0)$$

$$\text{si } \alpha > 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha} \times (-1) = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R} \qquad (\text{car } 1-\alpha < 0).$$

Les assertions 1. et 2. sont donc démontrées.

- Cas où $\alpha = 1$

Si $\alpha = 1$, alors pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t}$. Une primitive de la restriction de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ étant donnée par la fonction ln, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Le troisième point du théorème est donc prouvé.

▶ **Exemple 9 :** D'après le critère de Riemann, les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \qquad ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt$$

et les intégrales généralisées suivantes sont divergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \qquad ; \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^3}\, dt \qquad ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt.$$

5 Propriétés de l'intégrale généralisée

Théorème 4 (Linéarité de l'intégrale généralisée)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$), où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt$$

est convergente et on a l'égalité :

$$\lambda \left(\int_a^b f(t)\, dt\right) + \mu \left(\int_a^b g(t)\, dt\right) = \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt.$$

Preuve

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1 (relation de Chasles). On applique la propriété de linéarité de l'intégrale, vue dans le cours de calcul intégral, et on ≪ passe à la limite ≫ dans cette égalité.

▶ **Exemple 10 :** D'après le critère de Riemann et le théorème précédent, l'intégrale généralisée :

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^3}\, dt$$

est convergente et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^3}\, dt = 3 \underbrace{\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt\right)}_{1} + 4 \underbrace{\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt\right)}_{\frac{1}{2}} = 5.$$

Théorème 5 (Intégrale généralisée et relation d'ordre)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $I = [a, b[$ (respectivement $I =]a, b]$), où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que l'hypothèse (H) suivante est satisfaite.

$$\text{(H)} \quad \forall\, x \in I,\ f(x) \leq g(x)$$

Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes, alors on a l'inégalité suivante :

$$\int_a^b f(t)\, dt \ \leq \ \int_a^b g(t)\, dt.$$

► **Remarque**

On peut relaxer l'hypothèse (H) et la remplacer par l'hypothèse :

$$(H') \qquad \forall\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que } [c,d] \subset I,\ \forall\, x \in [c,d],\ f(x) \leq g(x), \text{ sauf éventuellement pour un nombre fini de points de } [c,d]$$

sans changer la conclusion du théorème.

Preuve

> À nouveau, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1 (relation de Chasles). On applique le lien entre intégrale et relation d'ordre, vu dans le cours de calcul intégral, et on ≪ passe à la limite ≫ dans l'inégalité.

► **Exemple 11 :** Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{t} \leq 1$ (la fonction inverse est décroissante sur $[1, +\infty[$) et donc $\dfrac{1}{t^6} \leq \dfrac{1}{t^5}$ (multiplication des deux membres de l'inégalité précédente par $\dfrac{1}{t^5} > 0$). D'après le critère de Riemann, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^6}\, dt$ sont convergentes. On a alors, d'après le résultat précédent :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^6}\, dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\, dt.$$

On note que cette inégalité peut aussi être obtenue par un calcul direct de chacun des deux membres de l'inégalité ($\frac{1}{5} \leq \frac{1}{4}$).

6 Le théorème de comparaison (cas positif)

Théorème 6 (Le théorème de comparaison dans le cas positif)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $I = [a, b[$ (respectivement $I =]a, b]$), où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que l'hypothèse (H) suivante est satisfaite.

$$\text{(H)} \qquad \forall\, x \in I,\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

1. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est aussi convergente et on a :
$$\int_a^b f(t)\, dt \ \leq\ \int_a^b g(t)\, dt.$$
2. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est aussi divergente.

► **Remarque**

On peut, ici aussi, assouplir l'hypothèse (H) et la remplacer par :

$$(H') \qquad \forall\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que } [c,d] \subset I,\ \forall\, x \in [c,d],\ 0 \leq f(x) \leq g(x), \text{ sauf éventuellement pour un nombre fini de points de } [c,d]$$

sans modifier la conclusion du théorème.

Preuve

On donne la preuve du théorème dans le cas où I est un intervalle du type $[a, b[$, l'autre cas se démontrant de façon analogue.

- Soient F et G les fonctions définie par :

$$F : [a, b[\to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad G : [a, b[\to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt.$$

Compte tenu de l'hyptohèse (H) (ou H') on a :

$$(*) \qquad \forall\, x \in [a, b[\quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \leq \int_a^x g(t)\, dt = G(x) \qquad \text{(cf. cours de calcul intégral).}$$

- On suppose que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente. De cette convergence, de l'hyptohèse (H) (ou H') et du théorème 2, on tire :

$$(**) \qquad \text{la fonction } G \text{ est majorée.}$$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que la fonction F est majorée. D'après le théorème 2, l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est donc convergente. D'après le théorème 5, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \ \leq\ \int_a^b g(t)\, dt.$$

L'assertion 1 est donc prouvée.

- On suppose que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente. En appliquant le théorème 2, on obtient $\lim\limits_{x \to c} F(x) = +\infty$. D'après le théorème ≪ des gendarmes ≫ et $(*)$, on a alors $\lim\limits_{x \to c} G(x) = +\infty$. Par suite, l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est divergente, d'où le deuxième point du théorème.

► **Exemple 12 :** L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2}\, dt$ est convergente.

En effet, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$ et par suite

$$\forall\, t \in [1, +\infty[\quad 0 \leq \frac{|\sin(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \qquad \text{(cf. hypothèse } (H)\text{).}$$

D'autre part, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente (critère de Riemann). En appliquant le théorème de comparaison, on voit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2}\, dt$ est convergente.

► **Remarque**

Ce théorème est un outil très utile pour étudier une intégrale généralisée d'une fonction positive, lorsque l'on ne peut pas calculer l'intégrale de la fonction f. Il s'agit essentiellement du résultat fondamental (cf. théorème 2) revisité. La formulation du théorème 6 le rend plus commode à appliquer.

7 Le faux problème : cas où il existe un prolongement par continuité

Lemme 1 (Cas où il y a prolongement par continuité)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b[$ (respectivement $I =]a, b]$), où $a, b \in \mathbb{R}$.
Si f admet un prolongement par continuité à $[a, b]$, alors l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.

Preuve

On donne la démonstration du théorème dans le cas où $I = [a, b[$, l'autre cas se démontrant de façon analogue. On suppose que la fonction f admet un prolongement par continuité à $[a, b]$. On le note $\widehat{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{array}{ll} (*) & \forall\, t \in [a, b[\quad \widehat{f}(t) = f(t)\ ; \\ (**) & \widehat{f} \text{ est continue sur } [a, b]. \end{array}$$

D'après $(**)$, la fonction $\widehat{f}$ admet une primitive Φ sur $[a, b]$ (cf. cours de calcul intégral). Soit $x \in [a, b[$.

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)\ dt &= \int_a^x \widehat{f}(t)\ dt \qquad \text{(cf. } (*) \text{ et } [a, x] \subset [a, b[) \\ &= \Phi(x) - \Phi(a) \qquad \text{(cf. définition de } \Phi \text{ et } [a, x] \subset [a, b[) \end{aligned}$$

De ce calcul et de la continuité de Φ en b (Φ est dérivable sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$), on a :

$$\lim_{x\ \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt = \Phi(b) - \Phi(a) \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donc convergente.

► **Exemple 13 :** L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ est convergente.

Voici comment on peut justifier cette assertion. Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, la fonction f définie par :

$$f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$$

admet un prolongement par continuité : la fonction $\widehat{f}$ définie par :

$$\widehat{f}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \in]0, 1] \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

On applique le lemme précédent pour conclure.