# Chapitre X

# Calcul Intégral

**Terminologie :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que :

- $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I$ si $f$ est une fonction continue sur $I$ ;
- $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ ($n \in \mathbb{N}^*$), si $f$ est une fonction $n$ fois dérivable sur $I$ et si la dérivée $n$-ième de $f$, notée $f^{(n)}$, est continue sur $I$.
- $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable sur $I$ (i.e. de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

## 1 Primitives

### 1.1 Définition, existence et discussion sur la non-unicité

**Définition 1 (Primitive d'une fonction)**

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive de $f$ sur $I$ est une fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $I$ et qui vérifie :

$$\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

► **Exemple 1 :** Les fonctions

$$F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{x^3}{3} \qquad \text{et} \qquad F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{x^3}{3} + 1$$

sont deux primitives de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$.

**Théorème 1 (Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante)**

Soit $f$ une fonction définie sur un *intervalle* $I$ de $\mathbb{R}$ et soient $F_1$ et $F_2$ deux primitives de $f$ sur $I$. Alors il existe un nombre réel $k$ (indépendant de $x$) tel que :

$$\forall\, x \in I \quad F_1(x) = F_2(x) + k.$$

**Preuve**

Soit $a$ un élément de $I$ fixé. Soit $x$ un élément de $I$ différent de $a$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $F_1 - F_2$ entre $a$ et $x$ et en remarquant que $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$, on obtient $F_1(x) - F_2(x) - (F_1(a) - F_2(a)) = 0$, i.e. :

$$F_1(x) = F_2(x) + F_1(a) - F_2(a).$$

On en déduit que :

$$\forall\, x \in I \quad F_1(x) = F_2(x) + k,$$

avec $k$ nombre réel défini par $k = F_1(a) - F_2(a)$.

**Théorème 2 (Critère d'existence d'une primitive)**

Soit $f$ une fonction définie et *continue* sur un *intervalle* $I$ de $\mathbb{R}$. Alors $f$ admet une primitive sur $I$.

► **Remarque**

D'après les théorèmes 1 et 2, toute fonction $f$ définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ admet une primitive $F$ sur $I$ et les autres primitives de $f$ sur $I$ sont les fonctions $F + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

## 1.2 Primitives des fonctions usuelles

| Fonction | Une primitive | Domaine de validité |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$, $a$ réel | $x \mapsto ax$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$, $n$ entier relatif, $n \neq -1$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$<br>sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, si $n \leq -2$ |
| $x \mapsto x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln(x)$ | sur $]0, +\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x}$ | sur $]0, +\infty[$ |
| $x \mapsto \sin(x)$ | $x \mapsto -\cos(x)$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos(x)$ | $x \mapsto \sin(x)$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ | $x \mapsto \tan(x)$ | sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par exemple |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \mapsto \arcsin(x)$ | sur $]-1, 1[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ | $x \mapsto \arctan(x)$ | sur $\mathbb{R}$ |

► **Remarque**

Pour démontrer les résultats de ce tableau, il suffit de vérifier, pour chaque ligne, que la fonction de la deuxième colonne est dérivable sur l'intervalle donné et de montrer que sa dérivée coïncide avec la fonction de la première colonne. En effet, dire que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ signifie, par définition même, que $F$ est dérivable sur $I$ et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

## 1.3 Primitives et linéarité

**Théorème 3 (Primitives et linéarité)**

1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive $F$ sur $I$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $aF\colon I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $af$ sur $I$.
2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ (resp. $g\colon I \to \mathbb{R}$) une fonction admettant une primitive $F$ (resp. $G$) sur $I$. Alors la fonction $F + G\colon I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur $I$.
3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ (resp. $g\colon I \to \mathbb{R}$) une fonction admettant une primitive $F$ (resp. $G$) sur $I$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $aF + bG$ est une primitive de la fonction $af + bg\colon I \to \mathbb{R}$ sur $I$.

**Preuve**

Ce théorème est conséquence de la linéarité de la dérivation.

► **Exemple 2 :** Une primitive de la fonction $f$ définie par :

$$f\colon ]0, +\infty[\to \mathbb{R}\ ,\ x \to -3x + \frac{2}{x} = (-3) \times x + 2 \times \frac{1}{x}$$

est donnée par la fonction :

$$F\colon ]0, +\infty[\to \mathbb{R}\ ,\ x \to -\frac{3}{2}x^2 + 2\ln(x).$$

## 1.4 Primitives et composition

**Théorème 4 (Primitives et composition)**

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et soit $g\colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition telles que la composée $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ est définie, i.e. telles que :

$$\forall\, x \in\ I \quad f(x) \in J.$$

Alors la fonction $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $h$ définie par :

$$h\colon I \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f'(x) \times g'(f(x)).$$

**Preuve**

Ce théorème est une traduction, dans le langage des primitives, du résultat du cours de calcul différentiel suivant : si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et soit $g\colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition telles que la composée $g \circ f$ est définie, alors la fonction $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I$ et on a pour tout $x \in I$, $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

► **Remarque**

Ce théorème possède de nombreuses applications. On liste ≪ les plus classiques ≫ ci-dessous.

| Hypothèses | Fonction | Une primitive | Domaine de validité |
|---|---|---|---|
| • $u\colon I \to \mathbb{R}$ admettant une primitive $U$ sur $I$<br>• $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ | $x \mapsto u(ax+b)$ | $x \mapsto \dfrac{1}{a} \times U(ax+b)$ | sur une partie $J$ de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in J \quad ax+b \in I$ |
| • $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$<br>• $\forall x \in I \quad u(x) > 0$ | $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $x \mapsto \ln(u(x))$ | sur $I$ |
| • $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$<br>• $\forall x \in I \quad u(x) < 0$ | $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $x \mapsto \ln(-u(x))$ | sur $I$ |
| $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$ | $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ | $x \mapsto e^{u(x)}$ | sur $I$ |
| • $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$<br>• $\forall x \in I \quad u(x) > 0$<br>• $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq -1$ | $x \mapsto u'(x) \times \underbrace{u(x)^\alpha}_{e^{\alpha \times \ln(u(x))}}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} \times u(x)^{\alpha+1}$ | sur $I$ |

▶ **Exemple 3**

1. Une primitive de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \cos(3x)$ est donnée par la fonction :
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x).$$
2. Une primitive de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+9}$ est donnée par la fonction :
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \ln(x^2+9).$$
3. Une primitive de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \underbrace{8\cos(2x)}_{4\times 2\cos(2x)} e^{\sin(2x)}$ est donnée par la fonction :
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 4 \times e^{\sin(2x)}.$$
4. Une primitive de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto (2x+1) \times (x^2+x+3)^{\frac{5}{3}}$ est donnée par la fonction :
$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{3}{8} \times (x^2+x+3)^{\frac{8}{3}}.$$

# 2 L'intégrale

## 2.1 Définition

**Définition 2 (Définition de l'intégrale)**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soient $a, b \in I$. On appelle intégrale de $a$ à $b$ le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et défini par
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
où $F$ est une primitive (quelconque) de $f$.

▶ **Remarque**

La définition de $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas du choix de la primitive $F$ de $f$ sur $I$ choisie, d'après le théorème 1.

▶ **Exemple 4 :** $\int_0^2 2x\,dx = [x^2]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$.

## 2.2 Interprétation géométrique de l'intégrale

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire est l'aire du carré de côté $OI$, où $I$ est le point du plan tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

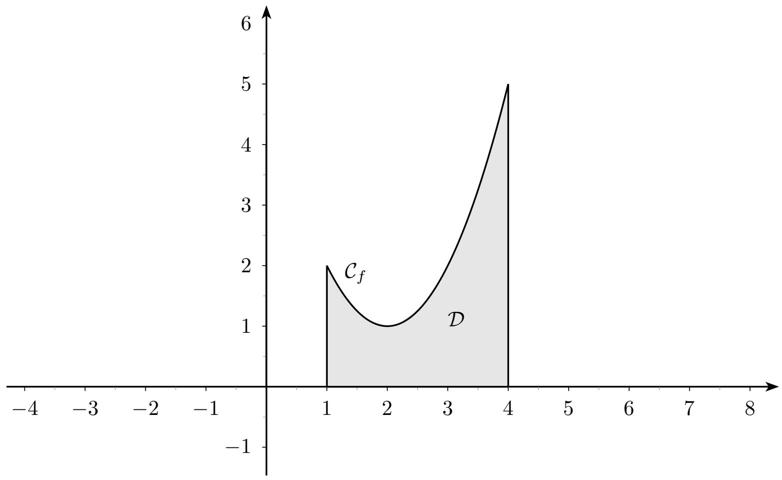
**Définition 3 (Domaine associé à une fonction continue et positive au dessus d'un segment)**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. On appelle domaine associé à une fonction $f$ continue et *positive* au-dessus de $[a; b]$, le domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

**Théorème 5 (Interprétation géométrique de l'intégrale)**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I$ et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ associé à $f$ au-dessus de $[a; b]$, exprimée en unités d'aire, est donnée par $\int_a^b f(x)\,dx$.

▶ **Exemple 5 :** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[1; 4]$. L'aire du domaine associé à cette fonction continue et positive sur $[1; 4]$ est donnée par $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$.




## 2.3 Intégration par parties

**Théorème 6 (Intégration par parties)**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

**Preuve**

Ce théorème est conséquence de la formule de dérivation : $(uv)' = u'v + v'u$.

► **Exemple 6 :** Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$, on introduit les fonctions $u$ et $v$ définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u(x) = x \text{ et } v(x) = \sin(x).$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \cos(x).$$

À l'aide du théorème précédent, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,dx &= [\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v(x)}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

► **Remarque**

On s'efforcera de rédiger soigneusement, comme ci-dessus, les calculs d'intégrales par intégration par parties.

## 2.4 Intégration par changement de variable

**Théorème 7 (Intégration par changement de variable)**

Soit $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur son ensemble de définition. On suppose que :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \varphi(x) \in I.$$

Ainsi la fonction $f \circ \varphi$ est-elle bien définie. On a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

► **Exemple 7 :** Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2u)}{2 + 2\sin(u)}\,du$, à l'aide du changement de variable $x = \sin(u)$.

Ici, la nouvelle variable $x$ est exprimée en fonction de la variable donnée $u$. Comme pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$, l'intégrale à calculer se réécrit :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(u)}{2 + 2\sin(u)}\,\cos(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{1 + \sin(u)}\,\cos(u)du.$$

On reconnaît une intégrale du type $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$, où :

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{x}{x+1} \quad ; \quad \varphi\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}\ ,\ u \mapsto \sin(u).$$

On remarque que la fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; le théorème précédent s'applique donc. Pour effectuer le changement de variable $x = \sin(u)$, on calcule :

$$dx = \sin'(u)\,du = \cos(u)du \quad ; \quad \sin(0) = 0 \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

On a donc :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

▶ **Exemple 8 :** Calcul de $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$, avec le changement de variable $x = u^2$.

Ici, contrairement à l'exemple précédent, c'est la variable donnée $x$ qui est exprimée en fonction de la nouvelle variable $u$. Dans un premier temps, on va exprimer $u$ en fonction de $x$ pour pouvoir appliquer le théorème précédent, i.e. on cherche une ≪ formule ≫ du type $u = \varphi(x)$ ≪ réciproque de la formule ≫ $x = u^2$.

La fonction $\psi$ définie par :

$$\psi\colon [1,2] \to [1,4]\ ,\ u \mapsto u^2$$

est continue, strictement croissante et vérifie $\psi(1) = 1$ et $\psi(2) = 4$. D'après, le théorème de la bijection, la fonction $\psi$ est donc bijective. On note $\varphi = \psi^{-1}$ l'application réciproque de $\psi$ :

$$\varphi\colon [1,4] \to [1,2]\ ,\ x \mapsto \sqrt{x}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,4]$. On a atteint notre premier objectif :

$$\forall\, x \in [1,4] \quad \forall\, u \in [1,2] \quad x = u^2 = \psi(u) \Longleftrightarrow u = \varphi(x) = \sqrt{x}.$$

D'après le théorème précédent, appliqué avec :

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 4 \quad ; \quad f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{2u}{1+u} \quad ; \quad \varphi\colon\ [1,4] \to [1,2]\ ,\ x \mapsto \sqrt{u}$$

on a :

$$(*) \qquad \underbrace{\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx}_{J} = \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{2u}{1+u}\,du.$$

En pratique, pour passer du membre de gauche de l'identité $(*)$ à son membre de droite, on n'écrit pas le terme du milieu et on remplace *en une seule fois* :

$\sqrt{x}$ par $u$ $\quad (u = \varphi(x))$

$dx$ par $2udu$ $\quad (x = u^2$ et la dérivée de $u \mapsto u^2$ est $u \mapsto 2u)$ ;

$1$ par $\sqrt{1} = 1$ ;

$4$ par $\sqrt{4} = 2$.

D'après $(*)$, on a donc :

$$J = \int_1^2 \frac{2u}{1+u}\,du = 2\int_1^2 \frac{u}{1+u}\,du = 2\int_1^2 \frac{1+u-1}{1+u}\,du = 2\int_1^2 1 - \frac{1}{1+u}\,du = 2\ [u - \ln(1+u)]_1^2 = 2 + \ln\left(\frac{4}{9}\right).$$

## 2.5 Propriétés de l'intégrale

**Théorème 8 (Relation de Chasles)**

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $c \in ]a,b[$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

▶ **Exemple 9 :** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f\colon [0,2] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in ]1,2] \end{cases}$$

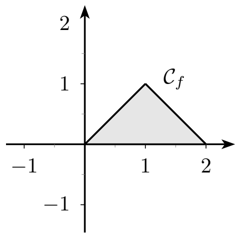
La fonction $f$ est clairement continue sur $[0,1[\cup]1,2]$. On calcule :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1 = f(1) \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2-x = 1 = f(1).$$

La fonction $f$ est donc aussi continue en 1. La fonction $f$ étant continue sur $[0,2]$, on peut considérer son intégrale sur $[0,2]$. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2-x\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat en considérant l'interprétation géométrique de l'intégrale. En effet, $f$ étant continue et positive sur $[0,2]$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ est l'aire du triangle grisé ci-dessous. Cette aire vaut $\frac{2\times 1}{2} = 1$.




**Théorème 9 (Linéarité de l'intégrale)**

Soient $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ et $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, pour tout $\mu\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) + \mu\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

► **Remarque**

Ce théorème découle du théorème 3.

**Théorème 10 (Positivité de l'intégrale)**

Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$, i.e. telle que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

et

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff \forall x\in[a,b] \quad f(x)=0.$$

**Théorème 11 (Intégrale et relation d'ordre)**

Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x).$$

Alors on a :

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

▶ **Remarque**

On obtient ce théorème en appliquant le précédent à la fonction $g - f$ qui est continue et positive sur $[a,b]$.

▶ **Exemple 10 :** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et soient $m, M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(*) \qquad\qquad \forall\, x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M,$$

i.e. $m$ (resp. $M$) est un minorant (resp. majorant) de $f$ sur $[a,b]$. (Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. De tels réels $m$ et $M$ existent donc toujours.) D'après $(*)$ et le théorème précédent, on a :

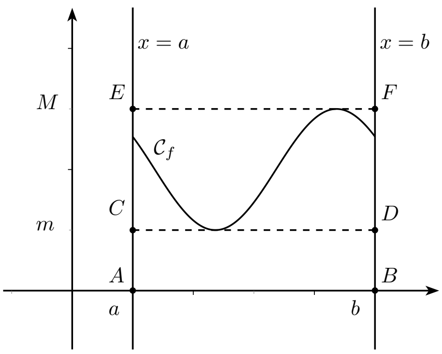
$$\underbrace{\int_a^b m\ dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \underbrace{\int_a^b M\ dx}_{M(b-a)}$$

et donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

Cette inégalité se traduit géométriquement, dans le cas où $f$ est de plus positive sur $[a,b]$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aire du rectangle<br>$ABDC$ | $\leq$ | Aire du domaine associé à $f$<br>au-dessus de $[a,b]$ | $\leq$ | Aire du rectangle<br>$ABFE$ . |




▶ **Remarque**

L'exemple précédent est une application classique du théorème 11. On peut garder l'idée suivante à l'esprit. ≪ D'un encadrement d'une fonction continue sur un segment, on déduit un encadrement de son intégrale sur ce segment ≫.

**Théorème 12 (Majoration de la valeur absolue d'une intégrale)**

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ Alors on a :

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

► **Exemple 11 :** On va expliquer comment combiner les deux théorèmes précédents pour prouver que la valeur absolue de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x^5 \ln(x+1))\, dx$$

est inférieure ou égale à $\pi$. La méthode exposée ne requiert pas le calcul de la valeur exacte de $I$, qui est délicat.

D'après le théorème 12, on a :

$$(*) \qquad |I| = \left| \int_0^{\pi} \sin(x^5 \ln(x+1))\, dx \right| \leq \int_0^{\pi} \left|\sin(x^5 \ln(x+1))\right|\, dx.$$

Le sinus d'un nombre réel étant compris entre $-1$ et 1, sa valeur absolue est inférieure ou égale à 1. Ainsi a-t-on :

$$(**) \qquad \forall\, x \in [0, \pi] \quad |\sin(x^5 \ln(x+1))| \leq 1.$$

« En intégrant l'inégalité $(**)$ entre 0 et $\pi$ », on trouve, d'après le théorème 11 (cf. aussi exemple 10) :

$$(***) \qquad \int_0^{\pi} \left|\sin(x^5 \ln(x+1))\right|\, dx \leq \int_0^{\pi} 1\, dx = \pi.$$

De $(*)$ et $(***)$, on déduit alors $|I| \leq \pi$.

# 3 Fonctions définies à l'aide d'une intégrale

**Théorème 13 (Intégrale fonction de sa borne supérieure)**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$. Alors la fonction :

$$F\colon I \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

est la primitive de $F$ qui s'annule en $a$. La fonction $F$ vérifie donc $F(a) = 0$ et est dérivable (et donc continue) sur $I$, avec comme dérivée $f$. Ainsi, si pour tout $t \in I$, $f(t) \geq 0$, la fonction $F$ est croissante.

► **Exemple 12 :** Soit $F$ la fonction définie par :

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Alors $F$ est dérivable (et donc continue sur $\mathbb{R}$) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$. On en déduit que la fonction $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 14 (Valeur moyenne d'une fonction)**

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \underbrace{\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)}_{\text{valeur moyenne de la fonction } f}.$$

**Preuve**

L'énoncé résulte de l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $F$ définie par : $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ qui est dérivable (et donc continue) sur $[a,b]$.

► **Exemple 13 :** La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0,\pi]$ est :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\, [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

# 4 Sommes de Riemann

**Théorème 15 (Sommes de Riemann)**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)}_{\text{valeur moyenne de la fonction } f}$$

et

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)}_{\text{valeur moyenne de la fonction } f} .$$

**Interprétation géométrique du théorème :** Dans le cas où on suppose de plus $f$ positive sur $[a, b]$, on peut expliquer géométriquement la convergence de la suite de terme général :

$$\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

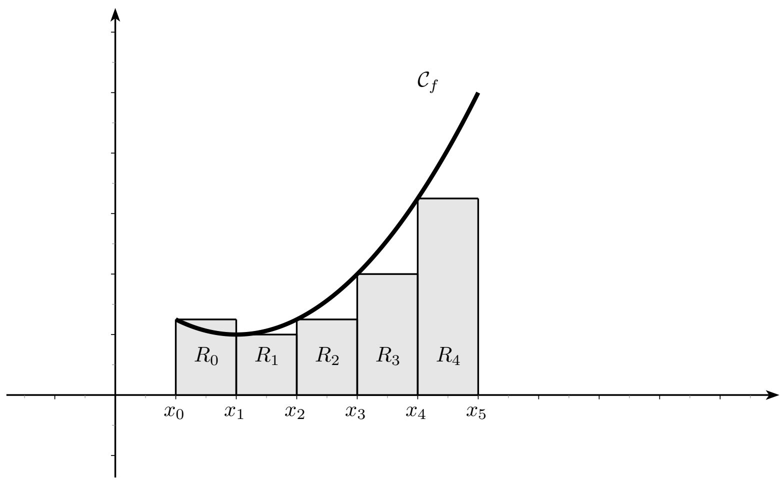
vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Ce n'est pas tout à fait la formulation de la première assertion du théorème précédent (on a mutliplié par $(b-a)$ de chaque côté du symbole $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$), mais l'énoncé précédent est équivalent et plus commode pour ce qui nous intéresse.
On commence par donner une interprétation géométrique du terme d'indice 5 de la suite considérée. Sur le dessin ci-dessous, on a posé, pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$ :

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{5}.$$

Pour chaque $k \in [\![0, 4]\!]$, le rectangle $R_k$ a pour hauteur $f(x_k)$ et pour largeur $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{5}$. Par suite, l'aire du rectangle $R_k$ est : $\dfrac{b-a}{5}\, f(x_k)$. L'aire de tout le domaine grisé ci-dessous est donc :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{b-a}{5}\, f(x_k) = \frac{b-a}{5}\left(\sum_{k=0}^{4} f\left(a+k\,\frac{b-a}{5}\right)\right).$$

On retrouve le terme d'indice 5 de la suite considérée.



Le terme d'indice $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) de la suite considérée admet une interprétation géométrique analogue, dans laquelle les rectangles auront pour largeur $\dfrac{b-a}{n}$. Plus $n$ devient grand, plus il y a de rectangles et plus ceux-ci ont une largeur petite (le découpage est de plus en plus fin). Intuitivement l'aire de la zone grisée (la somme des aires des $n$ rectangles), qui est égale au terme d'indice $n$ de la suite, tend vers l'aire du domaine associé à $f$ au-dessus de $[a,b]$, i.e. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, quand $n$ tend vers $+\infty$.

▶ **Exemple 14 :** On étudie le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right).$$

Si on pose :

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^3 \qquad ; \qquad a = 0 \qquad ; \qquad b = 1$$

alors on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Comme la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème précédent pour obtenir :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-0}\left(\int_0^1 t^3\,dt\right) = \frac{1}{4}.$$

## 5 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 16 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I$ ($n \in \mathbb{N}$). Soient $a, x \in I$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Polynôme de degré } n \text{ de Taylor}} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt}_{\text{Reste d'ordre } n} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k}_{\text{Polynôme de degré } n \text{ de Taylor}} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt}_{\text{Reste d'ordre } n} \end{aligned}.$$

**Preuve**

Dans le cas où $n = 0$, l'assertion équivaut à : $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$. Cette dernière est vraie, d'après la définition même de l'intégrale que nous avons adoptée. Le cas général où $n$ est quelconque se déduit du cas $n = 0$, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que nous ne détaillons pas ici.

▶ **Exemple 15 :** On prouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(*) \qquad |\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

La démonstration proposée ci-dessous, basée sur la formule de Taylor avec reste intégral, se scinde en deux parties. On donne ensuite deux applications typiques de $(*)$ : une majoration de l'erreur commise dans une approximation et un calcul de limite.

- Preuve de $(*)$ pour $x \geq 0$

  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction sin entre 0 et $x$. On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin^{(0)}(0) + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \int_0^x \sin^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt \\ &= x - \int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt \qquad (\text{car } \sin^{(0)} = \sin,\ \sin^{(1)} = \cos,\ \sin^{(2)} = -\sin \text{ et } \sin^{(3)} = -\cos). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(**) \qquad |\sin(x) - x| = \left|\int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt\right|.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt\right| &\leq \int_0^x \left|\cos(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right|\,dt \qquad (\text{cf. théorème 12}) \\ &= \int_0^x \underbrace{|\cos(t)|}_{\leq 1} \left|\frac{(x-t)^2}{2}\right|\,dt \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\,dt \qquad (\text{cf. théorème 11 et pour tout } t \in [0,x] \quad \frac{(x-t)^2}{2} \geq 0) \\ &= \frac{x^3}{6} \qquad (\text{une primitive de } t \mapsto \frac{(x-t)^2}{2} \text{ est } t \mapsto -\frac{(x-t)^3}{6}.) \end{aligned}$$

On a donc :

$$(***) \qquad \left|\int_0^x \cos(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt\right| \leq \frac{x^3}{6}.$$

En combinant $(**)$ et $(***)$, on obtient l'inégalité $(*)$ :

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6} = \frac{|x|^3}{6} \qquad (\text{comme } x \geq 0,\ |x| = x).$$

- Preuve de $(*)$ pour $x < 0$

Soit $x < 0$. Alors $-x > 0$ et d'après ce qui précède on a :

$$(****) \qquad |\sin(-x) - (-x)| \leq \frac{|-x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{6}.$$

La fonction sinus étant impaire, on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$ et donc $\sin(-x) - (-x) = -(\sin(x) - x)$. Ainsi a-t-on :

$$(*****) \qquad |\sin(-x) - (-x)| = |-(\sin(x) - x)| = |\sin(x) - x|\,.$$

De $(****)$ et $(*****)$, on déduit l'inégalité $(*)$ :

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

- Première application de l'inégalité $(*)$ : Valeur approchée de $\sin(0.1)$ avec majoration de l'erreur commise

Pour $x = 0.1$, $(*)$ s'écrit $|\sin(0.1) - 0.1| \leq \frac{(0.1)^3}{6}$. En approximant $\sin(0.1)$ par $0.1$, on commet donc une erreur inférieure à $0.001$.

- Deuxième application de l'inégalité $(*)$ : Étude de la limite en 0 de $\frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après $(*)$ on a : $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$. En divisant chaque membre de cette inégalité par $|x^2| > 0$, on obtient :

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{|x|}{6}$$

et par suite :

$$-\frac{|x|}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} \leq \frac{|x|}{6}.$$

En appliquant le theorème « des gendarmes », on a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

▶ **Remarque**

La propriété démontrée dans l'exemple précédent, i.e. :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$$

admet une généralisation qui se formule comme suit. S'il existe $C > 0$ une constante telle que pour tout $t \in I$, on ait $|f^{n+1}(t)| \leq C$, alors on a :

$$\forall\, x \in I \quad \left| f(x) - \left( f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq C\, \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

## 6 Fonctions continues par morceaux

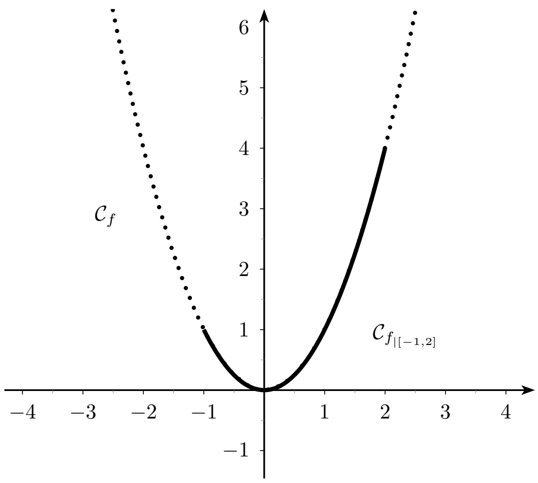
**Définition 4 (Restriction d'une fonction)**

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $J$ une partie de $I$. Alors la restriction de $f$ à $J$ est l'application notée $f_{|J}$ définie par :

$$f_{|J}\colon J \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f(x).$$

Pour passer de $f$ à $f_{|J}$, on a uniquement restreint l'ensemble de définition.

▶ **Exemple 16 :** Ci-dessous, on a représenté la fonction carrée $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $x \mapsto x^2$ (cf. courbe en pointillés) et la restriction $f_{|[-1,2]}$ de la fonction carrée à l'intervalle $[-1, 2]$ (cf. courbe en gras) .




**Définition 5 (Fonction continue par morceaux sur un segment)**

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$$

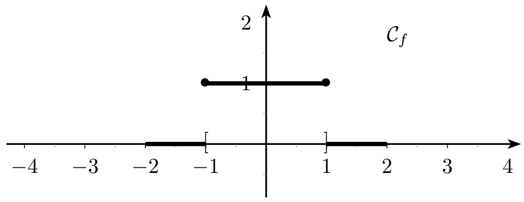
de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[a_i, a_{i+1}]$, i.e. que $f$ (ou $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$) admet une limite finie à droite en $a_i$ et une limite finie à gauche en $a_{i+1}$. Une telle subdivision de $[a, b]$, lorsqu'elle existe, est dite adaptée à $f$.

▶ **Exemples 17**

1. Soit $f$ la fonction définie par :

$$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

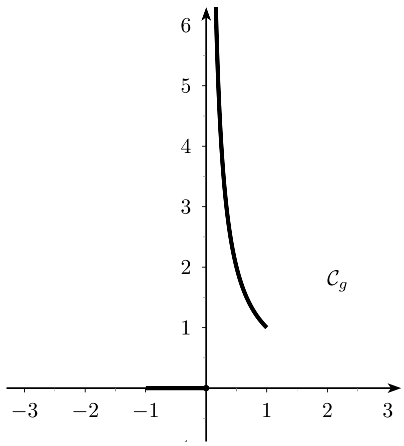
Alors $f$ est continue par morceaux sur $[-2,2]$. Elle possède deux points de discontinuité, en $-1$ et en 1. La subdivision $a_0 = -2 < a_1 = -1 < a_2 = 1 < a_3 = 2$ de $[-2,2]$ est adaptée à $f$.




2. Soit $g$ la fonction définie par :

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,0[ \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in ]0,1] \end{cases} .$$

Alors $g$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$.




**Définition 6 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ (e.g. $\mathbb{R}$). On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$, si pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ la fonction $f_{|[a,b]}$ définie sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

▶ **Exemples 18**

1. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors la fonction indicatrice $\mathbb{1}_I$ de $I$ définie par :

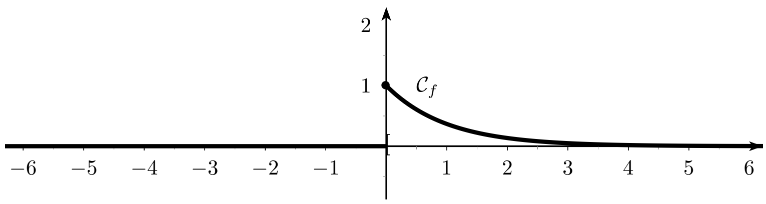
$$\mathbb{1}_I\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En particulier, si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$, alors la fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle ne possède que deux points de discontinuité, en $a$ et en $b$.

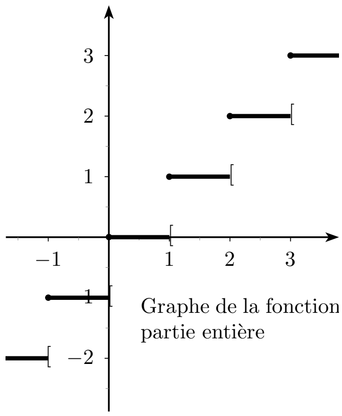
2. La fonction $f$ définie par :

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto e^{-t} \times 1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle ne possède qu'un point de discontinuité, en 0.



3. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses points de discontinuité est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.




Graphe de la fonction partie entière

# 7 Généralisation de la notion d'intégrale

On généralise la théorie de l'intégration vue pour les fonctions continues aux fonction continues par morceaux.

**Définition 7 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment)**

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et soit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$. Alors on définit l'intégrale de $a$ à $b$ de $f$ par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widehat{f_{|]a_i,a_{i+1}[}}(t)\,dt \\ &= \int_{a_0}^{a_1} \widehat{f_{|]a_0,a_1[}}(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} \widehat{f_{|]a_1,a_2[}}(t)\,dt + \int_{a_2}^{a_3} \widehat{f_{|]a_2,a_3[}}(t)\,dt + \ldots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} \widehat{f_{|]a_n,a_{n+1}[}}(t)\,dt\end{aligned}$$

où pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\widehat{f_{|]a_i,a_{i+1}[}}$ désigne le prolongement par continuité de la fonction $f_{]a_i,a_{i+1}[}$ à $[a_i, a_{i+1}]$. Pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widehat{f_{|]a_i,a_{i+1}[}}(t)\,dt$ est bien définie, car la fonction $\widehat{f_{|]a_i,a_{i+1}[}}$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

▶ **Remarque**

On peut démontrer que le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépend pas de la subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$ choisie.

▶ **Exemple 19 :** On considère à nouveau la fonction $f$ de l'exemple 17 définie par :

$$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On a vu que $f$ est continue par morceaux et que la subdivision $a_0 = -2 < a_1 = -1 < a_2 = 1 < a_3 = 2$ est une subdivision de $[-2,2]$ adaptée à $f$. On vérifie que les fonctions $\widehat{f_{|]-2,-1[}}$, $\widehat{f_{|]-1,1[}}$ et $\widehat{f_{|]1,2[}}$ sont définies par :

$$\widehat{f_{|]-2,-1[}}\colon [-2,-1] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 0 \quad ; \quad \widehat{f_{|]-1,1[}}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 1 \quad ; \quad \widehat{f_{|]1,2[}}\colon [1,2] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt &= \int_{-2}^{-1} \underbrace{\widehat{f_{|]-2,-1[}}(t)}_{0}\,dt + \int_{-1}^{1} \underbrace{\widehat{f_{|]-1,1[}}(t)}_{1}\,dt + \int_{1}^{2} \underbrace{\widehat{f_{|]1,2[}}(t)}_{0}\,dt \\ &= 2.\end{aligned}$$

**Théorème 17 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment)**

1. **Relation de Chasles**

   Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $c \in ]a,b[$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. **Linéarité**

   Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ et on a :

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \left( \int_a^b f(x)\,dx \right) + \mu \left( \int_a^b g(x)\,dx \right).$$

3. **L'intégrale d'une fonction positive presque partout est positive**

   Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

4. **Intégrale et relation d'ordre**

   Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ telles que $f \leq g$ sur $[a,b]$, sauf éventuellement pour un nombre fini de points, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. **Majoration de la valeur absolue d'une intégrale**

   Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ Alors $|f|$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ et on a :

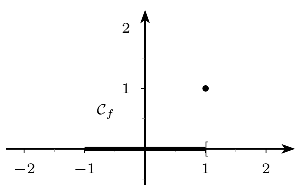
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

## ► Remarque

On prendra garde au fait que si une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors $f$ n'est pas nécessairement identiquement nulle sur $[a,b]$. Elle est nulle sur $[a,b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par exemple, la fonction $f$ définie par :

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,1[ \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[-1,1]$, positive sur $[-1,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt = 0$. Pourtant elle n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$ : en 1 elle ne s'annule pas.

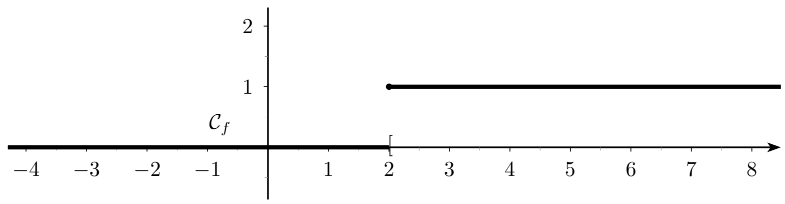


**Théorème 18 (Intégrale fonction de sa borne supérieure et continuité par morceaux)**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$. Alors la fonction :

$$F: I \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$$

est :
- continue sur $I$ ;
- dérivable en $x_0$, si $f$ est continue en $x_0$ et on a $F'(x_0) = f(x_0)$ ;
- croissante sur $[a, b]$, si $f$ est positive sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

► **Exemple 20 :** Soit $f$ la fonction $\mathbb{1}_{[2,+\infty[}$ (indicatrice de $[2, +\infty[$). On a donc pout tout $x \in ]-\infty, 2[$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = 1$.

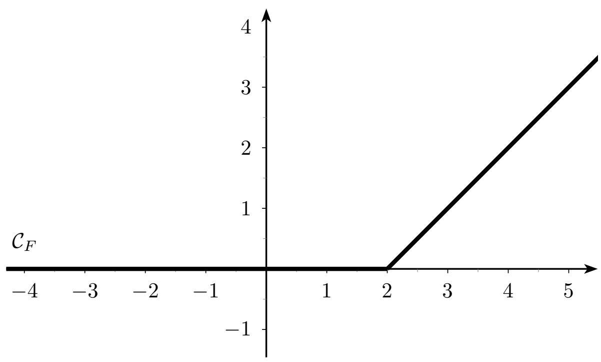



Soit $F$ la fonction définie par :

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt.$$

On calcule que :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$




On retrouve les résultats du théorème précédent : $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0$ si $x_0 \neq 2$ (2 est l'unique point de discontinuité de $f$) et croissante sur $\mathbb{R}$.